Wiskundeboeken en vooruitgang

Sebastiaan
Willem van Hillegaersbergstraat 100c
3051 RP Rotterdam
0104613233
sebastia@ch.twi.tudelft.nl

10 mei 2003

Inhoudsopgave

Voorwoord

Dit onderzoek is gedaan als onderdeel van het vak Wiskunde en Onderwijs. Bij de uitvoering van dit onderzoek heb ik op twee scholen gebruik mogen maken van een klas. Bij deze mijn dank aan Leo Bes van het Libanon Lyceum te Rotterdam en Alex Luycks van het Grotius College in Delft voor de toestemming hun klas voor een tweetal uurtjes te mogen gebruiken. En natuurlijk dank aan de leeringen van deze klassen die tot tweemaal toe flink hebben zitten puzzelen op een moeilijke toets.

Dit verslag gaat over het verschil in schoolboeken. Er zijn heden ten dage drie verschillende wiskundeboeken die in het merendeel van het middelbaar onderwijs worden gebruikt, te noemen Getal en Ruimte, Moderne Wiskunde en Netwerk.

Hetgeen waar onderzoek naar gedaan is, is welk boek, ofwel welke methode de grootste bijdrage levert aan het wiskundig inzicht. Welk boek dit het beste kan wordt hier onderzocht.

Inleiding

In mijn tijd op de middelbare school heb ik les gehad uit Sigma, een spartaans, droog ogend wiskundeboek. Het was voor mij dan ook niet minder dan een onaangename verassing toen ik zag hoe de wiskundeboeken sinds de invoering van de nieuwe basisvorming en tweede fase eruit zagen: vol plaatjes, wolkjes en dialoogjes waarin de meisjes niet meer per se gelijk hebben. 'Stripboeken' dacht ik bij m'n eigen. Mijn verontrustende vermoedens werden niet gestild toen ik bemerkte dat het niet bij dit boek bleef. Nagenoeg alle vakken hadden nu met dit soort boeken te maken.

Aangezien ik best bereid ben te geloven dat de scholen geen generatie wil opvoeden die goed is in het lezen van stripboeken en je een boek niet aan de kaft moet beoordelen ben ik mij gaan afvragen hoe een school de keuze maakt tussen de verschillende beschikbare boeken. Gebleken is dat sommige scholen vast blijven houden aan de opvolger van het boek dat ze gebruikten voor de invoering van de nieuwe basisvorming, andere scholen proberen (nog) elk jaar een ander boek uit om zo op den duur de beste eruit te kiezen. Maar op welke punten beoordeeld een school dan of een bepaald boek 'goed' is?

Zelf denk ik dat een goed wiskundeboek er een is waar het wiskundig inzicht van de leerlingen het meest ontwikkeld wordt. Dit is dan ook mijn onderzoeksvraag.

Een manier waarop dit onderzocht zou kunnen worden is als er aan de volgende punten voldaan wordt:

- klassen van hetzelfde leerjaar
- klassen van hetzelfde niveau
- scholen met dezelfde onderwijsvorm/ideologie
- leraren die op dezelfde wijze les geven

De ideale situatie zou zijn 3 klassen (3 soorten wiskundeboeken) van hetzelfde niveau op dezelfde school die les krijgen van dezelfde leraar met elke klas zijn eigen wiskundeboek. Helaas is dit ook de meest onwaarschijnlijke situatie die je kunt tegenkomen. Als we de strengte van de eisen relativeren en de verschillen goed noteren zou het mogelijk moeten zijn tot een zinnige vergelijking te komen.

1 Opzet

Gezien de bescheiden omvang van dit vak zullen we slechts 2 verschillende boeken met elkaar vergeleken worden op 2 verschillende scholen. Hiertoe worden er per klas 2 toetsen afgenomen: een voordat de klas met de beoogde stof gaat beginnen en een als ze de stof achter de rug hebben. Het verschil van de twee toetsen is een maat vor de vooruitgang van de leerling, welk een direct gevolg is van de kwaliteit van het onderwijs (boek èn docent).

Ik heb eerst de scholen en klassen uitgezocht en daarna gekeken welk deel van de stof beide klassen nog moesten doorgaan. De eerste school waar ik deze toetsen heb afgenomen is het Grotius College in Delft. Op deze school heb ik een korte stage gedaan. De klas was 2 Gymnasium (2001-2002) en de docent is Alex Luycks. Deze klas gebruikt het boek Getal en Ruimte 2HV2.

De tweede school is mijn oude school, het Libanon Lyceum te Rotterdam. Hier heb ik onderzoek gedaan in een 2 VWO klas onder leiding van Leo Bes. Hier is het gebruikte boek Moderne Wiskunde 2bHV.

De onderwerpen die in beide klassen nog behandeld moesten worden en van ongeveer hetzelfde niveau waren en dezelfde voorkennis vereisten zijn parabolen (Kwadratische verbanden) en omgekeerd evenredig (hyperbolische verbanden).

De voortoets (en ook de natoets) is voor beide groepen hetzelfde. Er wordt alleen gekeken naar de twee bovengenoemde onderwerpen. Ook heb ik geprobeerd om de terminologie te gebruiken die in beide boeken gebruikelijk is: we willen de leerling immers niet op taalkundig gebied testen. Beide toetsen zijn opgesteld voordat de eerste gegeven werd. Dit om te voorkomen dat je je naar de eerste groep gaat richten.

De toetsen zijn opbouwend gemaakt, beginnende bij makkelijke vragen, langzaam aan naar iets moeilijker. De voortoets wordt afgenomen voordat de leerlingen iets over het onderwerp gehad hebben. Dit komt er dus op neer dat dit een 'ondoenlijke' toets is. Op deze manier kom je echter wel te weten of de leerlingen 'iets' weten over kwadraten, of dat ze ooit eerder grafieken van functies hebben moeten tekenen die niet uit rechte lijnen bestaan.

De natoets is voor de leerling niet veel makkelijker. In feite is de makkelijkste vraag van deze toets op het niveau dat van de leerling gewenst is (wil deze voor de officiële overhoring een voldoende halen). In deze toets wordt gekeken in hoeverre de leerling de bijgebrachte kennis zelf kan toepassen en of de geleerde stof opgenomen is als regeltjes of inzicht. Als er in het boek alleen voorbeelden zijn gegeven van hyperbolische functies met horizontale asymptoot 0 dan kun je met een eenvoudige functie waar de horizontale asymptoot op 1 ligt kijken of ze het begrip 'asymptoot' wel hebben begrepen.

De toetsen zoals ze zijn gegeven zijn te vinden in de appendix.

1.1 Voortoets Kwadratisch

Eerst wil ik weten of de leerlingen al weten wat het begrip ’kwadratisch’ is. Dit doe ik door een viertal verschillende formules te presenteren waaruit de leerling de kwadratische moet kiezen.

(a) $y = 2x$

(b) $y = 4 - \sqrt{x}$

(c) $y = 3x^2 + 2$

(d) $y = \frac{2}{x}$

De tweede vraag gaat over de begrippen ’hoogste’ of ’laagste’ punt. Aangezien de leerlingen tot nu toe alleen maar lineaire functies hebben gehad is dit nieuw. Hoewel de begrippen intuïtief zijn kan de leerling alsnog kiezen voor ’het grootste getal’ (oneindig dus) òf voor het grootste getal dat niet oneindig is (de echte top dus). Dit wordt gevraagd van de formule $y = x^2 + 3$.

Bij de laatste vraag wilde ik kijken of ze de functie $y = 2x^2$ in een aantal punten konden evalueren (wat de rekenmachine inderdaad ook wel kon) en correct de bijbehorende grafiek tekenen. Hier wordt dan gekeken of de leerling de losse punten door rechte lijnen met elkaar verbindt of dat er een vloeiende lijn getrokken wordt.

1.2 Voortoets Hyperbolisch

De eerste vraag test het begrip van de notatie $xy = 30$. Wat is y als $x = 6$?

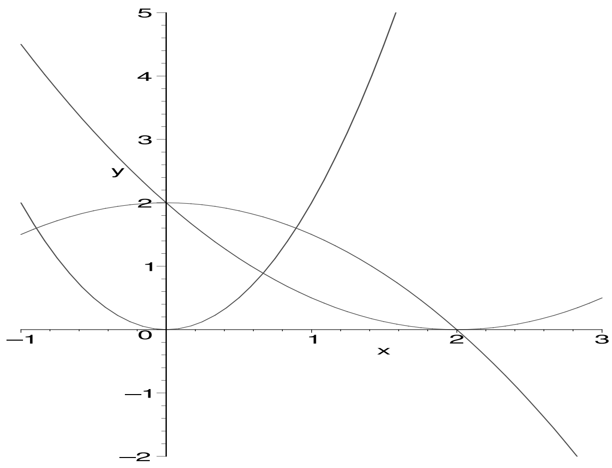
De tweede vraag gaat over de functie $y = \frac{2}{x}$. Ook hier worden een aantal functie evaluaties gevraagd en moet er een grafiek getekend worden, ook weer om te kijken of de leerling deze met rechte lijnen tekent of niet.

Verder wordt er naar de asymptoten gevraagd: ’Wat kun je zeggen over de waarde van y als $x = 0$’ en ’Wat doet y als x heel erg groot is’.

1.3 Natoets Kwadratisch en Hyperbolisch

Nu de leerlingen de beoogde stof achter de rug hebben zijn de vragen van deze toets ook een stuk moeilijker. Er wordt voornamelijk gekeken in hoeverre de leerlingen met kwadratische en hyperbolische formules kunnen ’spelen’.

In de eerste opgave zijn de grafieken van 3 verschillende kwadratische functies getekend. Aan de leerling de vraag welke hoort bij de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$. Het



idee achter deze vraag is of de leerlingen nu aan de hand van het teken van de kwadratische term of het een berg- of een dalparabool is en/of ze de verticale verplaatsing kunnen interpreteren. Uiteraard kunnen er ook een aantal punten berekend worden.

Daarna wordt van de formule $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$ gevraagd of deze een hoogste danwel laagste punt heeft en wat de coördinaten zijn van dat punt. Ook hier wordt gekeken of de leerling het functievoorschrift kan interpreteren.

In de laatste vraag over kwadratische formules moet een grafiekje getekend worden van de functie $y = 3x^2 - 2$ tussen -2 en 2. De leerling moet zelf op het idee komen om een tabel te maken.

Van de formule $y = \frac{3}{x} + 2$ wordt de horizontale asymptoot gevraagd. Zo wordt er gekeken of de leerling het begrip 'asymptoot' snapt, of klakkeloos 0 als antwoord geeft.

De laatste twee vragen gaan over gecombineerde kwadratische en hyperbolische formules. Bij de eerste vraag wordt van de functie $y = \frac{1}{x} + x^2$ een aantal functiewaarden uit te rekenen.

De tweede gaat over de functie $y = \frac{1}{x^2}$. Ook hier moeten een aantal functiewaarden berekend worden en een grafiek getekend worden om te zien of de leerlingen vloeiende grafiekek tekenen, zonder dat ze de modelfunctie natekenen.

2 Resultaat

In beide klassen waren niet alleen de eerste keer, maar ook de tweede keer onrustige geluiden te horen omdat er dingen gevraagd werden die ze nog niet wisten. Een toetsing wordt voornamelijk gebruikt om te kijken of de leerling aan een bepaald niveau voldoet, en om die reden is een toets ook voor de leerling zelf een referentie of hij/zij het gewenste niveau haalt. Ondanks sussende geluiden van de leerkracht en mij dat deze toets niet meetelt voor een cijfer en dat het niet belangrijk was de vragen goed te beantwoorden maar alleen goed over nagedacht moest worden, beeindigden desalniettemin een aantal leerlingen gedesillusioneerd de toets.

2.1 Voortoets Grotius

Deze toets is door 21 leerlingen gemaakt.

1. Welk van onderstaande formules zijn volgens jou kwadratisch?

   (a) $y = 2x$

   (b) $y = 4 - \sqrt{x}$

   (c) $y = 3x^2 + 2$

   (d) $y = \frac{2}{x}$

   Opmerkelijk is dat in 12 van de 21 gevallen de leerling koos voor zowel de wortel als het kwadraat. Wellicht hebben zij eerder geleerd dat deze twee aan elkaar verwant zijn, maar niet diep genoeg om het verschil te weten.

2. Gegeven is de formule $y = x^2 + 3$. Wat zijn de coördinaten van het hoogste of laagste punt van de grafiek van deze functie?

   Zo'n 14 leerlingen hebben het laagste punt gevonden. Ongeveer de helft maakte onderscheid tussen hoogste en laagste punt, waarbij het hoogste punt 'oneindig', 'veel' of 'afhankelijk van x' is.

3. (a) Vul deze tabel verder in voor de functie $y = 2x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y			0		

   (b) Schets de bijbehorende grafiek.

   De tabel werd in 16 gevallen goed ingevuld. 3 gevallen schijnen de functie $y = (2x)^2$ berekend te hebben, anderen kregen bij negatieve x ook negatieve y waarden. Opmerkelijk is dat zo'n leerling wel een parabool heeft getekend. Op 2 gevallen na waren alle grafieken vloeiend getekend.

4. Gegeven is de formule $xy = 30$.

    (a) Wat is y als $x = 6$?

    (b) Wat is x als $y = 2$?

    Deze vraag hebben 19 leerlingen goed beantwoord, bij de overige 2 bleef het blank.

5. Gegeven is de formule $y = \frac{2}{x}$.

    (a) Vul onderstaande tabel verder in.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y								

    (b) Wat kun je zeggen over de waarde van y als $x = 0$?

    (c) Wat kun je zeggen over de waarde van y als x heel erg groot is?

    (d) Schets de bijbehorende grafiek.

    De tabel is door 18 mensen goed ingevuld. Een enkele berekende $y = 2x$ of $y = \frac{x}{2}$. De verticale asymptoot is een grote vangst: maar liefst 15 leerlingen beweerden steevast dat delen door 0 ook 0 oplevert. 4 gaven het antwoord 'bestaat niet' of 'niet uit te rekenen'. De horizontale asymptoot is makkelijker in te zien. Maar liefst 18 hadden als antwoord dat 'y heel erg klein is', danwel 'minder waard is'. De grafiek zorgde echter voor nogal wat verwarring. 11 leerlingen hadden een grafiek getekend die op een hyperbool leek, maar op 3 na hadden ze allen dwangmatig de 0 meegetekend. Een enkele had zijn/haar getekende hyperbool vervangen voor een parabool.

Over het geheel genomen weet deze groep dat een grafiek van een functie niet altijd uit rechte lijnen hoort te bestaan. Ook is het rekenen met kwadraten hun niet vreemd, zij het niet dat het verschil tussen een kwadraat en een wortel nog niet duidelijk is. Delen door 0 is nog een probleem, maar horizontale asymptoten lijken goed te gaan. Ook bij het invullen van tabellen waren nauwelijks problemen.

2.2 Natoets Grotius

Deze toets is door 20 leerlingen gemaakt.

1. Hieronder zijn 3 grafieken getekend. Welk van de grafieken hoort bij de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$? (zie figuur op pagina 11)

Deze vraag is door 15 mensen goed beantwoord, slechts een enkele heeft een punt uitgerekend. De andere hadden voor de grafiek van de functie $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ *gekozen.*

2. Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$.

   (a) Heeft de grafiek een hoogste of een laagste punt?

   (b) Wat zijn de coördinaten van de top?

   Deze vraag werd door 19 leerlingen goed beantwoord, een had als antwoord dat dit het laagste punt was.

3. Schets de grafiek van de formule $y = 3x^2 - 2$ voor x tussen -2 en 2.

   Op 4 leerlingen na was deze vraag goed beantwoord. Maar enkelen waren op het idee gekomen een tabel te maken. Onder de foute antwoorden waren berg-parabolen, rechte lijnen of over de $x-$as verschoven dalparabolen te vinden.

4. Gegeven is de formule $y = \frac{3}{x} + 2$

   (a) Wat weet je van y als x heel groot is?

   (b) Schets de grafiek voor positieve x ($x > 0$).

   Bij deze waren alle leerlingen ervan overtuigd dat y erg klein wordt als $x \to \infty$. Desondanks waren er toch 9 leerlingen die wel de juiste grafiek hadden. 5 hadden de horizontale asymptoot braaf op 0 *gelegd. De overigen hadden lineaire functies getekend. Ook hier zag ik bijna nergens een tabel geschreven staan.*

5. Gegeven is de formule $y = \frac{1}{x} + x^2$. Vul de tabel verder in:

x	-2	-1	0	1	2
y					

   De tabel was door 14 mensen goed ingevuld, als we het punt $x = 0$ buiten beschouwing laten. Dit hadden er maar 2 *goed. In twee gevallen werd de min van $\frac{1}{x}$ voor negatieve x 'vergeten'.*

6. Gegeven is de formule $y = \frac{1}{x^2}$.

   (a) Vul deze tabel in:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y							

(b) Schets de bijbehorende grafiek.

Hier hebben 17 de goede tabel geleverd, waarvan 4 ook de verticale asymptoot hebben opgemerkt. De overige 3 raakten verward. 5 wisten de grafiek correct te tekenen, 7 hebben oorsprong meegetekend. Een enkele tekende een parabool.

De meeste grafieken worden zonder tabel getekend. Of de leerlingen zijn slim genoeg en kunnen aan de hand van het functievoorschrift de grafiek schetsen, of de leerlingen rekenen een punt uit en tekenen deze gelijk in (kladpapier was niet toegestaan). Soms was dit te achterhalen door te kijken of de grafiek met referentiepunten getekend was, of dat er een echte schets was gegeven. Het tweede geval wilde nog wel eens mislukken met onbekende functies. Over het algemeen genomen kon deze klas een functievoorschrift goed interpreteren. Het begrip 'hoogste' en 'laagste' punt zijn door alle leerlingen goed begrepen. Wat een asymptoot precies is lijkt niemand te weten en ook het delen door 0 wordt niet omzichtig gedaan.

2.3 Voortoets Libanon

Deze toets is door 22 leerlingen gemaakt.

1. Welk van onderstaande formules zijn volgens jou kwadratisch?

   (a) $y = 2x$

   (b) $y = 4 - \sqrt{x}$

   (c) $y = 3x^2 + 2$

   (d) $y = \frac{2}{x}$

   12 leerlingen hadden het juiste antwoord, de rest had andere combinaties.

2. Gegeven is de formule $y = x^2 + 3$. Wat zijn de coördinaten van het hoogste of laagste punt van de grafiek van deze functie?

   Deze vraag werd door 17 leerlingen niet begrepen. 2 hadden het goede antwoord, 3 merkten op dat je alle punten kunt bereiken.

3. (a) Vul deze tabel verder in voor de functie $y = 2x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y			0		

(b) Schets de bijbehorende grafiek.

Hier hebben 8 leerlingen de tabel correct ingevuld, 9 hadden een extra '-' voor negatieve x. 9 hadden een grafiek getekend die bij hun tabel past, slechts een enkele tekende een vloeiende lijn (of dit was het gevolg van een losse hand). De overigen hadden geen grafiek, of tekende een lijn.

4. Gegeven is de formule $xy = 30$.

   (a) Wat is y als $x = 6$?

   (b) Wat is x als $y = 2$?

   Deze vraag is door alle leerlingen goed beantwoord.

5. Gegeven is de formule $y = \frac{2}{x}$.

   (a) Vul onderstaande tabel verder in.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y								

   (b) Wat kun je zeggen over de waarde van y als $x = 0$?

   (c) Wat kun je zeggen over de waarde van y als x heel erg groot is?

   (d) Schets de bijbehorende grafiek.

   De tabel werd door 12 leerlingen goed ingevuld, 5 hadden niets en de overigen hadden de functie $y = 2x$ of $y = \frac{x}{2}$ geevalueerd. Bij de verticale asymptoot waren er 8 die opmerkten dat de y waarde hier niet bestaat, danwel erg groot is, 9 beweerden dat hier wel iets uit kwam. Over de horizontale asymptoot waren er 16 het eens dat y erg klein was. 9 leerlingen hadden een goed lijkende grafiek, 5 daarvan had echter wel de oorsprong meegenomen. 7 hadden een grafiek bestaande uit 1 of 2 rechte lijnen, de rest had geen grafiek.

Ongeveer de helft van de klas weet wat een kwadraat is, maar de preciese grafiek van een parabool schijnen nog maar weinigen te weten (nagenoeg geen van de getekende parabolen was vloeiend). Ook het begrip 'hoogste' en 'laagste' punt heeft men nog niet door. De horizontale asymptoot ziet men wel in, bij de verticale asymptoot gaan er nog steeds veel de mist in. Het tekenen van een grafiek aan de hand van een tabel lijkt goed te lukken.

2.4 Natoets Libanon

Deze toets is door 28 leerlingen gemaakt.

1. Hieronder zijn 3 grafieken getekend. Welk van de grafieken hoort bij de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$? (zie figuur op pagina 11)

   14 leerlingen hadden de juiste grafiek gekozen.

2. Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$.

   (a) Heeft de grafiek een hoogste of een laagste punt?

   (b) Wat zijn de coördinaten van de top?

   10 leerlingen kennen het begrip 'hoogste' of 'laagste' punt niet, 9 hadden het goede antwoord en eenzelfde aantal koos voor het laasgste punt. Slechts 3 leerlingen hadden de goede coördinaten van de top gevonden.

3. Schets de grafiek van de formule $y = 3x^2 - 2$ voor x tussen -2 en 2.

   6 leerlingen hadden een goede grafiek geschetst. 7 hadden een lineaire grafiek getekend, de rest had niets.

4. Gegeven is de formule $y = \frac{3}{x} + 2$

   (a) Wat weet je van y als x heel groot is?

   (b) Schets de grafiek voor positieve x ($x > 0$).

   Bij deze vraag zagen 3 leerlingen in dat de horizontale asymptoot bij $y = 2$ ligt. Volgens 16 andere werd y alleen maar klein. Het is slechts 2 mensen gelukt een goede grafiek te tekenen, een enkeling tekende iets anders, het merendeel liet deze vraag blanco achter.

5. Gegeven is de formule $y = \frac{1}{x} + x^2$. Vul de tabel verder in:

x	-2	-1	0	1	2
y					

   Er waren 2 leerlingen die de tabel goed hebben ingevuld. 9 merkten op dat het punt $x = 0$ niet bestaant, 1 kenmerkte dit met een `MaError`. *Of deze leerling ook begrijpt wat hier gaande kon ik niet uit het antwoord opmaken. Verder waren er 12 die deze tabel symmetrisch hebben gemaakt, dus $-4\frac{1}{2}, -2, \star, 2, 4\frac{1}{2}$. Bij deze leerlingen is het min teken kennelijk niet uitgekwadrateerd. Er waren er 13 die door 0 deelden.*

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y							

6. Gegeven is de formule $y = \frac{1}{x^2}$.

   (a) Vul deze tabel in:

   (b) Schets de bijbehorende grafiek.

   De tabel hebben 3 leerlingen goed ingevuld. 13 hadden wel de goede waarden, maar voor negatieve x ook een negatieve y. De leerlingen die in de vorige vraag goed met $x = 0$ zijn omgegaan deden dat nu ook. 1 leerling schetste de grafiek correct, 1 andere verbond 2 punten over de verticale asymptoot met elkaar. 7 leerlingen schetsten een grafiek die leek op $y = \frac{1}{x}$. Deze leerlingen hadden ook een extra min teken (ze hebben dus de waarden uit hun tabel correct getekend). Zo'n 12 leerlingen lieten deze vraag helemaal blanco en hadden dus ook geen grafiek. De overigen tekende rechtlijnige grafieken of een sinusoïde (resultaat van $\frac{1}{x}$ heel klein en grof schetsen, en de oorsprong meenemen in de grafiek).

De helft van de leerlingen wist de goede grafiek bij de formule te plaatsen, maar de top van een parabool weten er maar weinig te vinden. Ook bij het tekenen van een grafiek bij een functie zonder dat er een tabel gevraagd werd ging minder. Een deel kon een parabolische modelgrafiek niet koppelen aan het functievoorschrift, daar zij een lineaire getekend hadden. Het aantal leerlingen die weten wat een asymptoot is, is klein en het direct tekenen van een hyperbool ging ook niet goed. Het invullen van een tabel gaat betrekkelijk goed, zij het niet dat een groot gedeelte een min teken niet kwijtraakt na kwadrateren. Het tekenen van een grafiek uit deze tabel schept verwarring als de punten niet op een te verwachten grafiek liggen.

3 Conclusie

De leerlingen van het Grotius College beschikken over een degelijke basis. De getekende grafieken zijn vloeiend, het evalueren van kwadratische en hyperbolische modelfuncties is geen probleem. Het merendeel kan een top vinden van een parabolische functie en van een hyperbool werd de horizontale asymptoot ontdekt, maar ook het delen door 0. Het tekenen van een hyperbolische grafiek ging ook goed.

Nadat de stof behandeld was werd er nog steeds door 0 gedeeld en het begrip 'asymptoot' blijkt er niet te zijn. Functievoorschriften werden nagenoeg probleemloos geinterpreteerd, de top van een parabool werd door iedereen gevonden en ook het tekenen van een grafiek gaat voldoende goed.

De leerlingen van het Libanon Lyceum moesten het met minder voorkennis doen. Het tekenen van grafieken is rechtlijnig, toppen zijn onbekend. Deze leerlingen hebben nog nooit een andere grafiek gezien dan een lineaire. Delen door 0 komt nog veel voor, de horizontale asymptoot vinden de meesten wel. Ook het tekenen van een grafiek uit een tabel gaat redelijk goed.

Een paar weken later kon de helft bij een grafiek een functie zoeken, maar de top was ver te zoeken. Ook bij het tekenen van een functie kwam er slechts een enkeling op het idee om een tabel te maken. Dat terwijl het invullen van een tabel eigenlijk goed gaat. Toch lijkt het erop dat het begrip van een kwadratische functie nog niet echt bekend is aangezien een groot deel voor negatieve x een negatieve y krijgen en vaak een lineaire grafiek getekend wordt. Het interpreteren van functievoorschriften lukt niet zo goed. Van het delen door 0 was voor een aantal leerlingen van te voren al bekend dat dit niet mocht. Deze groep is niet groter geworden. Het begrip 'asymptoot' is hun echter niet duidelijk.

De leerlingen van het Libanon Lyceum lijken op het gebied van parabolen niet veel wijzer geworden te zijn. Wat betreft het tekenen van functies uit een tabel lijkt de klas eerder achteruit dan vooruit gegaan te zijn.

De leerlingen van het Grotius College hebben het begrip 'parabool' goed onder de knie en ook het tekenen van onbekende functies ging goed.

Uit bovenstaande resultaten moet ik concluderen dat de leerlingen van het Grotius College meer vooruit zijn gegaan dan de leerlingen van het Libanon Lyceum. Zij gebruikten het boek Getal en Ruimte. Dit zou dus beter moeten zijn dan Moderne Wiskunde.

Er zijn echter een aantal punten die ik in het volgende hoofdstuk zal noemen waaruit blijkt dat deze conclusie niet zonder meer getrokken kan worden.

4 Discussie

Het doen van dit soort onderzoek in de nieuwe basisvorming is moeilijker dan in het oude onderwijssysteem. Elke leerling werkt op zijn of haar eigen tempo en zo komt het voor dat niet iedereen in de klas even ver is. Sommige leerlingen zijn al met de nieuwe stof begonnen terwijl andere nog lang niet zo ver zijn. Zo is het moeilijk om de voorkennis van een klas te toetsen. Een oplossing hiervoor zou zijn om het werk naamgebonden te maken en duidelijk bij te houden waar elke leerling is met de stof op het moment dat de toets wordt afgenomen. Dit brengt echter zoveel extra werk mee dat dit voor dit onderzoek niet gedaan is.

Een belangrijk punt is dat ik in dit onderzoek een gymnasium met een VWO klas heb vergeleken. Dit uit zich onder meer in de observatie dat de gymnasiasten de toetsen als uitdaging zagen en ook binnen een half uurtje klaar waren. De VWO klas vatte de toets echter op als 'extra werk' en waren minder gemotiveerd om de toetsen te maken. De VWO klas sloeg ook makkelijker vragen over terwijl de gymnasiasten zo ver doorwerkten als ze konden. Natuurlijk is er ook het niveauverschil tussen gymnasium en VWO dat een rol speelt.

Voor de natoets was het de bedoeling dat deze afgenomen werd een of twee lessen voordat de officiële toets van de school werd afgenomen. Op het Grotius is dit gelukt, de leerlingen wilden zelfs een uitwerking hebben als oefening. Op het Libanon was dit door een miscommunicatie tussen de docent en mij mislukt. De natoets werd afgenomen nog voordat een groot deel van de klas met het tweede deel van het hoofdstuk begonnen was. Dit verklaard ook dat in de resultaten nauwelijks vooruitgang te zien is. Ook was de klas die dag erg baldadig en is de natoets door weinigen serieus gemaakt.

Een paar maanden voor ik deze toetsen maakte heb ik stage gelopen op het Grotius College. Hierdoor kan het zijn dat ik onbewust de kennis, het niveau en de beheersing van de stof de klas op deze school als referentie gekozen heb. Met andere woorden: het kan zijn dat de toetsen meer toegespitst waren op de klas van het Grotius dan die van het Libanon. Ik kan zelf niet beoordelen of dit zo is en het was ook niet de bedoeling.

Wanneer we rekening houden met bovenstaande punten moet ik concluderen dat het onderzoek mislukt is. Wel heb ik uit de antwoorden van de leerlingen veel geleerd, meer dan wat ik hier heb kunnen samenvatten. Het onderzoek is dus niet voor niets geweest.

A Voortoets

Voortoets Kwadratisch

1. Welk van onderstaande formules zijn volgens jou kwadratisch?

   (a) $y = 2x$

   (b) $y = 4 - \sqrt{x}$

   (c) $y = 3x^2 + 2$

   (d) $y = \frac{2}{x}$

2. Gegeven is de formule $y = x^2 + 3$. Wat zijn de coördinaten van het hoogste of laagste punt van de grafiek van deze functie?

3. (a) Vul deze tabel verder in voor de functie $y = 2x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
y			0		

   (b) Schets de bijbehorende grafiek.

Voortoets Hyperbolisch

1. Gegeven is de formule $xy = 30$.

   (a) Wat is y als $x = 6$?

   (b) Wat is x als $y = 2$?

2. Gegeven is de formule $y = \frac{2}{x}$.

   (a) Vul onderstaande tabel verder in.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y								

   (b) Wat kun je zeggen over de waarde van y als $x = 0$?

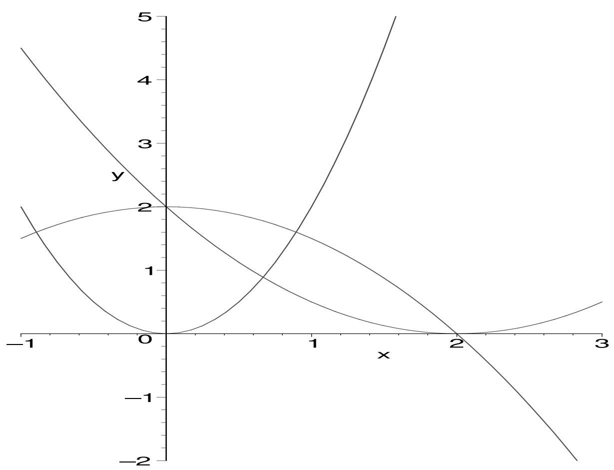
   (c) Wat kun je zeggen over de waarde van y als x heel erg groot is?

   (d) Schets de bijbehorende grafiek.

B Natoets

Natoets Kwadratische en Hyperbolische verbanden

1. Hieronder zijn 3 grafieken getekend. Welk van de grafieken hoort bij de formule $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$?



2. Gegeven is de formule $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$.

   (a) Heeft de grafiek een hoogste of een laagste punt?

   (b) Wat zijn de coördinaten van de top?

3. Schets de grafiek van de formule $y = 3x^2 - 2$ voor x tussen -2 en 2.

4. Gegeven is de formule $y = \frac{3}{x} + 2$

   (a) Wat weet je van y als x heel groot is?

   (b) Schets de grafiek voor positieve x ($x > 0$).

5. Gegeven is de formule $y = \frac{1}{x} + x^2$. Vul de tabel verder in:

x	-2	-1	0	1	2
y					

6. Gegeven is de formule $y = \frac{1}{x^2}$.

   (a) Vul deze tabel in:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y							

   (b) Schets de bijbehorende grafiek.

Referenties

[1] H.J. Smid A. Verweij E.M. Welling A.G. van Asch, H. Sterk, *Wiskunde en onderwijs*, TUE, TUD en UT, 2001.

[2] Jaap Dijkstra et al., *Moderne wiskunde*, 7e ed., vol. 2bHV, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1999.

[3] S. Rozemond R.A.J. Vuijk, L.A. Reichard, *Getal en ruimte*, 4e ed., vol. 2HV2, Educaboek, Houten, 1999.