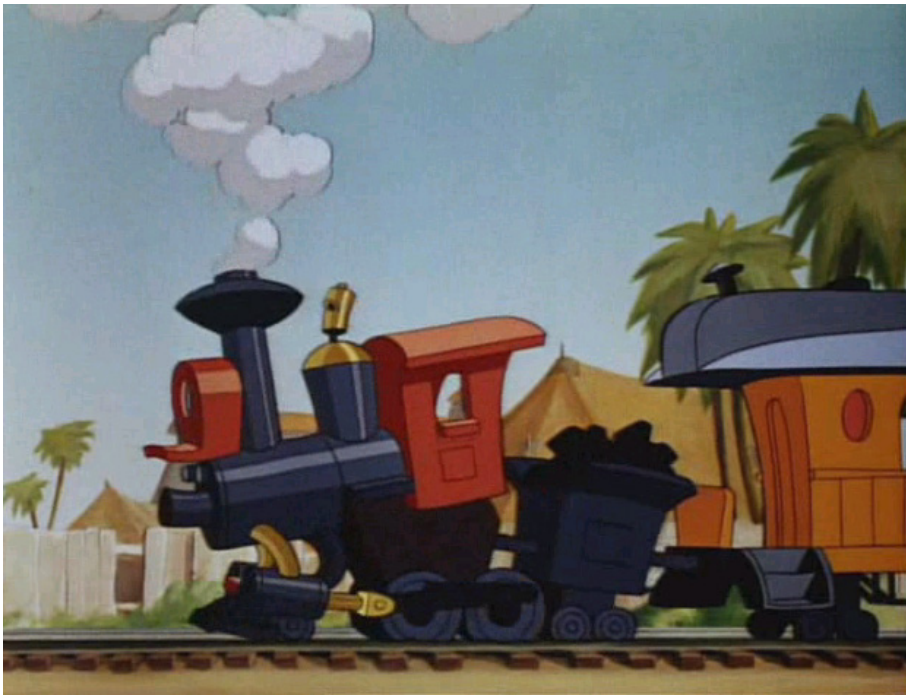


Keessie Puf

tussen de koeien



de doorzakking van een treinrail in een polderlandschap

Sebastiaan
Willem van Hillegaersbergstraat 100c
3051 RP Rotterdam
sebastia@ch.twi.tudelft.nl
121164

Jantien Hartog
Nobelstraat 5c
3039 SB Rotterdam
jean.dix@12move.nl
9310064

wi3094
februari-mei 2002

Inhoudsopgave

1	Samenvatting	3
2	Voorwoord	4
3	Lijst der symbolen	5
4	De trein staat stil	6
4.1	Modelopbouw	6
4.2	Analytische oplossing	7
4.3	Randvoorwaarden	8
4.4	Resultaten analytische berekening	8
4.5	Numerieke benadering	9
5	De trein rijdt	11
5.1	Modelopbouw	11
5.2	Numerieke benadering	11
5.3	Resultaten	12
6	Berekening van constanten	14
6.1	Oppervlaktemoment van de rail	14
6.2	Veerconstante	15
6.3	Massadichtheid ondergrond	15
7	Conclusie	17
A	Matlab programma Statisch Probleem	18
B	Matlab programma Dynamisch Probleem	19
C	Maple Worksheet	22
D	Literatuur	30

1 Samenvatting

In dit verslag zal er gekeken worden hoe een rail doorzakt onder het gewicht van een trein. In het vierde hoofdstuk wordt er naar een rail gekeken met een stilstaande trein erop. We hebben eerst een differentiaalvergelijking opgesteld om de doorzakking te kunnen berekenen. Deze differentiaalvergelijking hebben we zowel analytisch opgelost als numeriek bepaald. De vorm van beide grafieken (zie figuur 3 op pagina 9 en figuur 4 op pagina 10) zijn gelijk. Hieruit hebben we geconcludeerd dat onze opzet tot dusverre waarschijnlijk goed is.

In het vijfde hoofdstuk gaan we een stapje verder, we laten nu een trein met constante snelheid over de rail rijden. Hier hebben we een nieuwe differentiaalvergelijking opgesteld met de tijdsafhankelijkheid daarin verwerkt. Deze differentiaalvergelijking hebben we alleen numeriek benaderd, omdat het analytisch nogal moeilijk is.

Als de trein met een snelheid van $5 \frac{m}{s}$ rijdt komt de grafiek (zie figuur 5 op pagina 12) redelijk overeen met het statische geval. Wanneer de trein met een snelheid van $30 \frac{m}{s}$ over de rail dendert krijgen we echter niet de verwachte verandering te zien (zie figuur 6 op pagina 13). Dit wijst volgens ons op een fout in onze methode.

Het is voor ons daarom niet mogelijk geweest om de onderzoeksvraag te beantwoorden.

2 Voorwoord

Op een mooie dinsdag in februari van dit jaar werd ons het volgende probleem voorgelegd. Is het mogelijk om een trein te laten rijden in een polderlandschap zonder extra versteviging van de grond? Intuïtief is duidelijk dat een trein te zwaar is om zonder extra ondersteuning door het Nederlandse polderlandschap te rijden. Dit idee wordt ondersteund door de dagelijkse rit met de trein. Zodra je uit het goede raampje kijkt zie je dat de andere treinrails op bielzen liggen, die op hun beurt weer op een grindbed rusten. Het antwoord op de onderzoeksvraag is snel gegeven: nee, het kan niet. Dit verslag probeert hier een wetenschappelijke onderbouwing voor te vinden.

3 Lijst der symbolen

Variabele	Waarde	Eenheid	Beschrijving
$\eta(x)$		m	Doorzakking van de rails
Constanten	Waarde	Eenheid	Beschrijving
I	$1,728 \cdot 10^{-5}$	m^4	Oppervlaktemoment
E	$0,20 \cdot 10^{12}$	$\frac{N}{m^2}$	Elasticiteitsmodus
k	$1,186 \cdot 10^6$	$\frac{N}{m}$	Veerconstante
l	50	m	Lengte van de halve trein
L	1 of 10	km	Lengte van de beschouwde rails
q	12735	$\frac{kg}{s^2}$	Belasting van de trein op de rails
g	9,81	$\frac{m}{s^2}$	Gravitatieconstante
ρ	160	$\frac{kg}{m}$	Dichtheid van de ondergrond

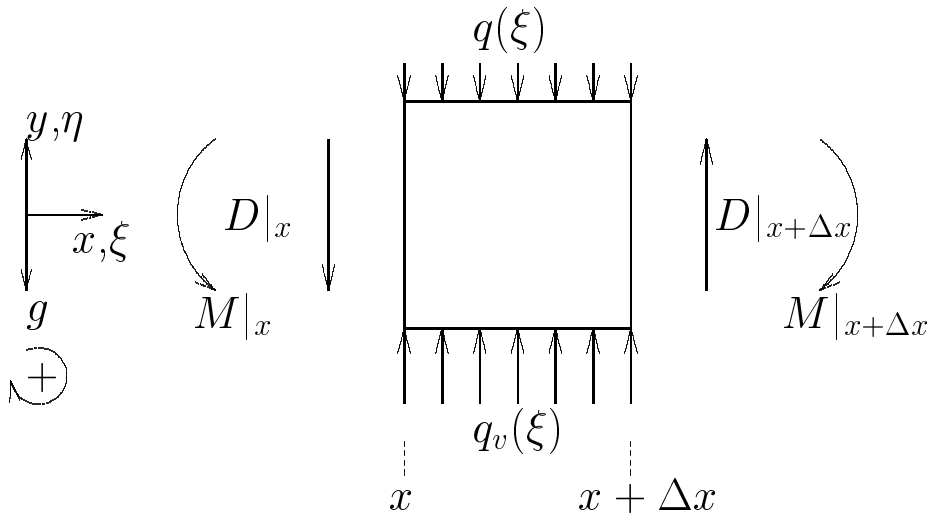
Tabel 1: Gegeven waarden

4 De trein staat stil

De onderzoeksvraag bleek makkelijk te beantwoorden, de wetenschappelijke onderbouwing is veel moeilijker. We pakken het probleem daarom systematisch aan en beginnen met een vereenvoudigd probleem. Als eerste bekijken we een stilstaande trein, het statische probleem. Als dat opgelost is kijken we in het volgende hoofdstuk naar een een rijdende trein, het dynamische probleem.

4.1 Modelopbouw

In dit hoofdstuk gaan we de vergelijking voor de doorzakking van de rail bepalen. Dit doen we om naar een element van een rail te kijken, want de doorzakking van beide rails zijn toch identiek. Van dit ene element stellen we het krachten- en momentenevenwicht op.



Figuur 1: Elementje uit een rail

In figuur 1 staat een element van de rail getekend. Aan de bovenkant van dit element staat de belasting $q(x)$, dit is van de trein op het element. De trein is echter niet het enige die voor een belasting op het element zorgt. Aan de onderkant van het blokje wordt een kracht door de verende ondergrond uitgeoefend namelijk:

$$q_v(x) = -k\eta(x) \quad (1)$$

Hierin zijn de kracht q_v en de uitwijking van de rail η beide naar boven gericht (zie figuur) en hieruit volgt een negatieve veerconstante k (zie paragraaf 6.2).

Verder zijn er natuurlijk nog de dwarskrachten en de momenten. Uitgewerkt geeft het krachtenevenwicht de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dD}{dx} = q(x) - q_v(x) \quad (2)$$

Het momentenevenwicht is gelijk aan:

$$D|_{x+\Delta x} + M|_x + \int_x^{x+\Delta x} (\xi - x)q_v(\xi) d\xi = M|_{x+\Delta x} + \int_x^{x+\Delta x} (\xi - x)q(\xi) d\xi \quad (3)$$

Dit levert precies dezelfde vergelijking op als het krachteenevenwicht. Alleen met deze ene vergelijking kunnen we geen vergelijking voor de doorzakking bepalen. Om toch een uitdrukking voor de doorzakking te krijgen gebruiken we onderstaande vergelijking 4, hier is het moment rechtsom positief gekozen. Deze twee vergelijkingen gecombineerd geeft vergelijking 5.

$$M = -EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} \quad (4)$$

$$\boxed{EI\eta_{xxxx}(x) + k\eta(x) = -q(x)} \quad (5)$$

4.2 Analytische oplossing

Om vergelijking 5 op te lossen vervangen we η door e^{rt} . Voor de homogene oplossing resulteert dit in:

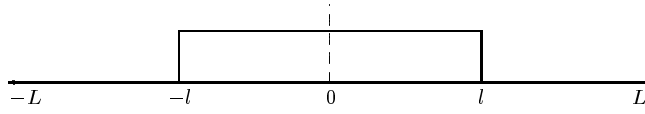
$$(EI r^4 + k)e^{rt} = 0 \quad (6)$$

Dit geeft $r^4 = -\frac{k}{EI}$ en noem $p^4 = \frac{k}{EI}$, gecombineerd wordt dit $r^4 + p^4 = 0$. Een oplossing hiervan is $r = p e^{i\frac{\pi}{4}}$. Met complexe cirkeltheorie vinden we alle oplossingen.

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ r_2 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ r_3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ r_4 &= \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned} \quad (7)$$

Hieruit volgt de homogene oplossing van de differentiaalvergelijking. Omdat q hier constant is (de trein staat stil), is de particuliere oplossing $-\frac{q}{k}$. De algemene oplossing voor de differentiaalvergelijking 5 is dus als volgt:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}px} \left(c_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}px\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}px\right) \right) + \\ & e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}px} \left(c_1 \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}px\right) + c_2 \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}px\right) \right) - \frac{q}{k} \end{aligned} \quad (8)$$



Figuur 2: Trein op de rail

4.3 Randvoorwaarden

In het statische geval is het probleem symmetrisch, dus kunnen we ons beperken tot de rechter helft van de trein. Vanuit de rail gezien zijn er twee toestanden: daar waar de trein wel staat en daar waar de trein niet staat. Het verschil in de vergelijkingen van deze toestanden is de belasting q . We gaan dus twee aparte problemen oplossen die aan elkaar verbonden zijn en deze verbintenis uit zich dan in de randvoorwaarden. We noemen het linkerdeel van de rail (waar de trein op staat) η^{links} en analoog introduceren we η^{rechts} .

$$\eta_x^{links}(0) = 0$$

$$\eta_{xxx}^{links}(0) = 0$$

$$\eta^{links}(l) = \eta^{rechts}(l)$$

$$\eta_x^{links}(l) = \eta_x^{rechts}(l)$$

$$\eta_{xx}^{links}(l) = \eta_{xx}^{rechts}(l)$$

$$\eta_{xxx}^{links}(l) = \eta_{xxx}^{rechts}(l)$$

(9)

$$\eta^{rechts}(L) = 0$$

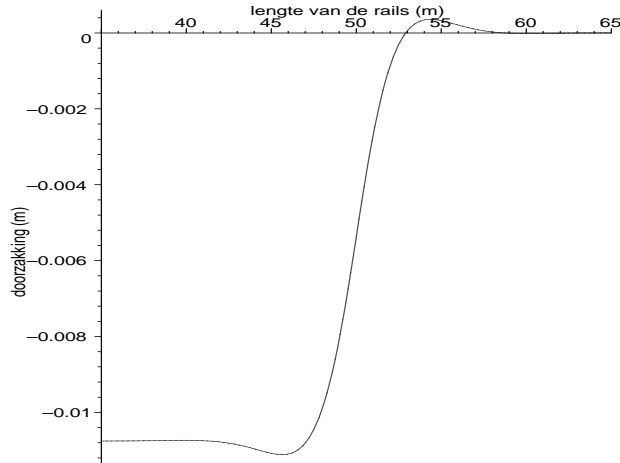
$$\eta_{xx}^{rechts}(L) = 0$$

4.4 Resultaten analytische berekening

We lossen de differentiaalvergelijking 8 met randvoorwaarden 9 op met behulp van Maple (zie bijlage B).

Het verloop van de doorzakking van de treinrail is weergegeven in figuur 3.

Te zien is dat de doorzakking van de rail in de buurt van 1 centimeter ligt. Dit hebben wij aangenomen bij het definiëren van de veerconstante (zie paragraaf 6.2). De kleine uitwijkingen rond de 50 meter zijn het gevolg van het feit dat de rail vast zit aan de grond. Dit is als het ware een inklemming in en dus geen vrij uiteinde.



Figuur 3: Doorzakking van de rail in het statische geval, analytisch berekend

4.5 Numerieke benadering

Na de analytische oplossing gaan we het probleem numeriek benaderen en hopelijk geeft dit hetzelfde resultaat.

Om de differentiaalvergelijking 8 op een numerieke manier op te lossen schrijven we deze om met behulp van standaardformules voor centrale differentie voor hogere orde afgeleiden. Dit leidt tot de volgende uitdrukking:

$$\frac{EI}{h^4} (u_{j-2} - 4u_{j-1} + 6u_j - 4u_{j+1} + u_{j+2}) + ku_j = -q_j \quad (10)$$

Ook hier beschouwen we alleen het rechterstuk (zie figuur 2) met de daarbij behorende randvoorwaarden. Er is één duidelijk verschil met de werkwijze van het analytische gedeelte, namelijk dat we de rail niet in tweeën knippen. De twee verschillende stadia waarin de rail zich bevindt worden hier in een en hetzelfde stelsel verwerkt. Het verschil in de stadia zit in de vector q , op de plaatsen waar de trein zich bevindt is het element q_j gelijk aan de belasting van de trein, elders is deze gelijk aan 0.

Bij dit probleem horen de volgende randvoorwaarden (vergelijk (9)):

$$\begin{aligned} \eta_x(0) &= 0 \\ \eta_{xxx}(0) &= 0 \\ \eta(L) &= 0 \\ \eta_{xx}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

5 De trein rijdt

5.1 Modelopbouw

We beschouwen hetzelfde blokje als in paragraaf 4.1.

We bekijken het krachtenevenwicht maar in tegenstelling tot het statische geval geldt hier dat $\Sigma F = ma$. Hier is m het gewicht en a de verticale versnelling van de rail. Het gewicht van dit kleine blokje rail is $\rho\Delta x$ waarin ρ de massadichtheid van de rail met ondergrond is. Deze hebben wij berekend in paragraaf 6.3. De versnelling a is de tweede afgeleide van de doorzakking, dus $a = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\eta(x, t)$.

$$-D|_x + q(x)\Delta x + D|_{x+\Delta x} + q_v(x)\Delta x = \rho\Delta x \frac{\partial^2}{\partial t^2}\eta(x, t) \quad (14)$$

Verder geldt in een dynamisch geval voor het momentenevenwicht dat $\Sigma M = J\omega$ met J het traagheidsmoment en ω de hoekversnelling van de rail. Deze hoekversnelling is echter zo klein, dat deze verwaarloosd wordt. Het momentenevenwicht is dus dezelfde als bij het statische probleem. Dit geeft $\frac{\partial M}{\partial x} = D$. Uitwerken en combineren met $M = -EI\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}$ leidt tot de algemene differentiaalvergelijking voor het dynamische probleem.

$$\boxed{EI\eta_{xxxx} + \rho\eta_{tt} + k\eta = -q} \quad (15)$$

5.2 Numerieke benadering

Om vergelijking 15 numeriek op te kunnen lossen, schrijven we deze om naar een stelsel.

$$\begin{cases} v_t &= -\frac{1}{\rho}(EI\eta_{xxxx} + k\eta + q) \\ \eta_t &= v \end{cases} \quad (16)$$

Discretiseren van $EI\eta_{xxxx} + k\eta + q$ geschied op dezelfde manier als in het statische probleem, hierbij wordt (16) gereduceerd tot $v_t = -\frac{1}{\rho}(Au + q)$. We bekijken een traject waarbij de trein eerst over een brug gaat, dan door ons polderlandschap rijdt en deze verlaat over een andere brug. Dit leidt tot de keuze van de randvoorwaarden waarbij $\eta(0, t) = \eta_{xx}(0, t) = \eta(L, t) = \eta_{xx}(L, t) = 0$. Hierdoor is de matrix A bijna hetzelfde als die van het statische geval, het enige verschil zit hem in de elementen aan het begin van de matrix.

We laten laten de trein op de brug beginnen, daardoor is de grond op tijdstip 0 niet doorgezakt. Dit geeft onze enige beginvoorwaarde $\eta(x, 0) = 0$.

Voor betere leesbaarheid schrijven we het probleem om naar een standaard matrix-vector vergelijking. We definiëren B , w en p als volgt:

$$B = \begin{pmatrix} O & I \\ -\frac{1}{\rho}A & O \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad p = -\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \quad (17)$$

We krijgen dan als vergelijking:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Bw + p \quad (18)$$

We hebben deze matrix ingevoerd in Matlab en de eigenwaarden berekend. Deze zijn van de vorm $\pm 0 \pm i82$. Met ± 0 geeft Matlab aan dat de waarde dicht bij nul ligt, maar ongelijk aan is 0. Er zijn eigenwaarden met een positief reëel deel en daarom valt onze keuze voor de tijdstapmethode op Euler Achterwaarts (zie voor meer informatie [4], bladzijden 57 en 58).

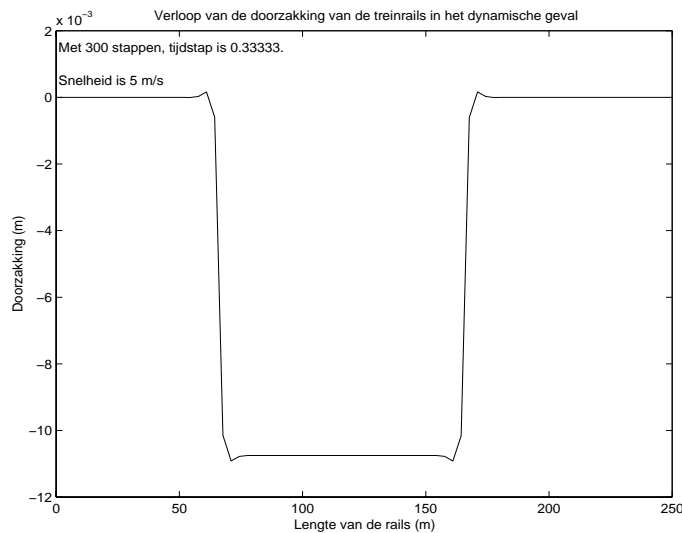
Met Euler achterwaarts krijgen we:

$$w_{i+1} = (I - \tau B)^{-1}(w_i + \tau p_{i+1}) \quad (19)$$

De snelheid waarmee de trein rijdt is verwerkt in de vector p . Bij elke volgende tijdstap wordt er een nieuwe vector p gegenereerd met de positie van de trein.

Het blijkt dat bij het nemen van 500 steunpunten van de rail (per 2 meter 1) de matrix B positieve reële eigenwaarden heeft. Dit geeft een restrictie voor keuze van de tijdstap τ . Deze eigenwaarden zijn ± 0.3332 en wil je binnen het stabiliteitsgebied blijven, dan moet gelden dat $0,3332\tau > 2$ ofwel $\tau > 6,1$. Dit lijkt ons echter een te grote tijdstap en daarom kiezen wij voor minder steunpunten, namelijk 300. Hier doet zich het probleem van positieve reële eigenwaarden niet voor en kunnen wij τ kleiner kiezen.

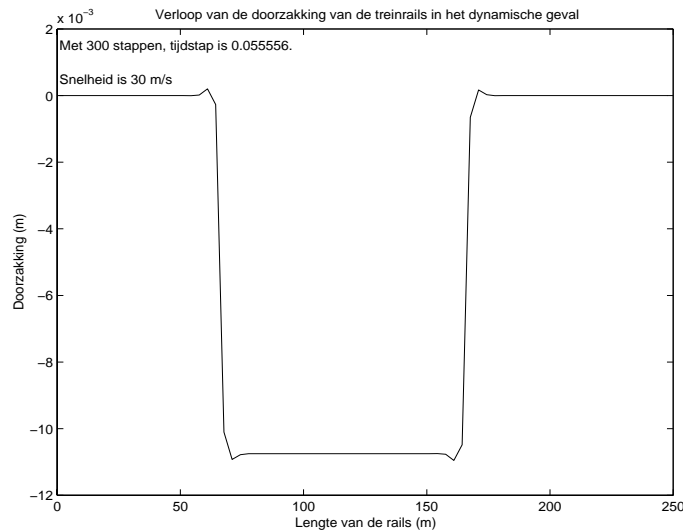
5.3 Resultaten



Figuur 5: Doorzakking van de rail in het dynamische geval, trein rijdt $5 \frac{m}{s}$

Bovenstaande hebben wij geïmplementeerd in Matlab. Wij hebben voor een snelheid van $5 \frac{m}{s}$ gekozen omdat de trein dan goed is te vergelijken met het statische geval. De grafieken (figuur 4 en figuur 5) komen redelijk overeen, dit leidt niet tot direct aanwijsbare fouten.

Wanneer de snelheid van de trein wordt verhoogd, verwacht je een verminderde doorzakking van de rail. In ieder geval een verandering ten opzichte van de vorige grafiek.



Figuur 6: Doorzakking van de rail in het dynamische geval, trein rijdt $30 \frac{m}{s}$

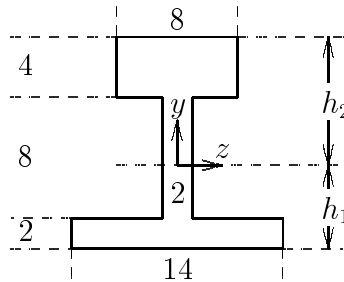
Figuur 6 grafiek voldoet echter niet aan onze verwachtingen aangezien deze nagenoeg hetzelfde is als in figuur 5.

Er rees een vermoeden dat wij de gronddichtheid te hard gekozen hadden. Bij een veel kleinere dichtheid ($\rho = 1$ in plaats van $\rho = 160$) kregen wij echter nog steeds dezelfde grafiek. Wij denken dat er in de opzet van ons probleem een fout zit die wij helaas niet hebben kunnen traceren.

6 Berekening van constanten

6.1 Oppervlaktemoment van de rail

Voor het berekenen van het oppervlaktemoment I van de rail volgen we de methode zoals die beschreven is in [2] op pagina 23. De doorsnede van de rail, zoals gegeven in figuur 7, leek ons een goede weergave van de werkelijkheid. Merk op dat alle eenheden in centimeters zijn.



Figuur 7: Dwarsdoorsnede van de rail (eenheden in cm)

Eerst moeten we de evenwichtslijn bepalen. We hebben aangenomen dat deze zich bevindt in het middelste gebied (zie tekening). Met de wetenschap dat $h_1 + h_2 = 14$ moeten we h_1 en h_2 vinden zó dat

$$\frac{E}{R} \int_{-h_1}^{h_2} yb(y)dy = 0 \quad (20)$$

De integraalvergelijking wordt in ons geval:

$$\int_{-h_1}^{-h_1+2} 2ydy + \int_{-h_1+2}^{h_2-4} 8ydy + \int_{h_2-4}^{h_2} 14ydy = 0 \quad (21)$$

ofwel

$$-4h_1^2 + 12h_1 + 4h_2^2 - 60 = 0 \quad (22)$$

Wanneer we gebruiken dat $h_2 = 14 - h_1$ komen we tot de conclusie dat $h_1 = \frac{265}{31} cm$ en $h_2 = \frac{169}{31} cm$.

Nu kunnen we het oppervlaktemoment I bepalen:

$$I = \int_{-h_1}^{-h_1+2} 2y^2dy + \int_{-h_1+2}^{h_2-4} 8y^2dy + \int_{h_2-4}^{h_2} 14y^2dy \quad (23)$$

Alles invullen en uitwerken geeft:

$$\boxed{I = 1,728 \cdot 10^{-5} m^4} \quad (24)$$

6.2 Veerconstante

Het gaat ons erom een idee te krijgen over de manier van doorzakking, niet de exacte doorzakking zelf. Aangezien een exacte waarde voor de veerconstante moeilijk te krijgen is, gebruiken we een constante die bij belasting van het volle treingewicht 1 centimeter doorzakt. Hiervoor hebben we gegevens nodig over de trein. Op een gele dubbeldekker met groene banken vonden wij de volgende waarden op een treinstel staan:

tot. 65 ton
rijt. 53 ton
← 26,89 m →
→ 20,00 m ←
→ 2,50 m ←

De trein bestond uit 4 van deze treinstellen. De formule voor de veerconstante is $k = \frac{F}{u}$. Het gewicht van 65 ton wordt verdeeld over een lengte van 26,89 meter. Aangenomen dat de rail 1 centimeter zal doorzakken, vinden we voor de veerconstante k :

$$k = \frac{65 \cdot 1000 \cdot 9,81}{26,89 \cdot 0,01} \quad (25)$$

$$\boxed{k = 1,186 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}} \quad (26)$$

6.3 Massadichtheid ondergrond

In deze paragraaf wordt de massadichtheid van de bedding waar de trein over rijdt samengesteld. Deze bedding bestaat uit de rail, de biels en de ondergrond. We hebben gekeken naar een rail van 1 meter lang met een ondergrond van 50 centimeter diep, verder hebben we aangenomen dat er 1 biels per meter ligt. De ondergrond bestaat voor 70% uit zand en voor 30% uit water. Een schematische tekening is weergegeven in figuur 8.

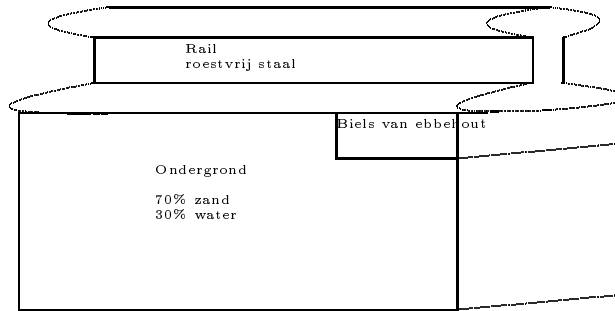
Alle gebruikte dichtheden hebben we in Binas opgezocht en zijn gegeven in $\frac{kg}{m^3}$. Wij beschouwen echter een 1 dimensionaal probleem en moeten deze omrekenen naar $\frac{kg}{m^3}$.

We nemen de dichtheid van figuur 8 en vermenigvuldigen dat met de oppervlakte van de dwarsdoorsnede, dan krijgen we de dichtheid in $\frac{kg}{m}$.

Het volume kan berekend worden met behulp van de gegevens van de dwarsdoorsnede van de rail zoals deze gegeven is in figuur 7 en is gelijk aan $0,0776 m^3$.

De inhoud van de rail is $\frac{0,0076}{0,0776} = 0,098$ e deel van het geheel.

De inhoud van de biels is $\frac{0,0028}{0,0776} = 0,036$ e deel van het geheel.



Figuur 8: Rail met ondergrond

De inhoud van de ondergrond is $\frac{0,072}{0,0776} = 0,866$ e deel van het geheel.

Nu gaan we met behulp van de dichtheden van gebruikte materialen de dichtheid van het geheel uitrekenen.

$$\begin{aligned}
 \rho &= V_{rail}\rho_{rvstaal} + V_{biels}\rho_{ebbehout} + V_{ondergrond}(0,7\rho_{zand} + 0,3\rho_{water}) \\
 &= 0,098 \cdot 7,8 \cdot 10^3 + 0,036 \cdot 1,26 \cdot 10^3 + 0,866(0,7 \cdot 1,6 \cdot 10^3 + 0,3 \cdot 0,998 \cdot 10^3) \\
 &= 2,039 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}
 \end{aligned} \tag{27}$$

De zojuist berekende waarde is de dichtheid van de bedding in 3 dimensies. Om de gewenste dichtheid te krijgen moet deze vermenigvuldigd worden met de dwarsdoorsnede. Dus $\rho_{grond} = 2,039 \cdot 10^3 \cdot 0,0776 = 158,2$. Aangezien dit gebaseerd is op schattingen van de samenstelling van de ondergrond ronden we deze gemakshalve af.

$$\boxed{\rho = 160 \frac{kg}{m}} \tag{28}$$

7 Conclusie

De onderzoeksvraag was of er een trein door een Neerlands polderlandschap kan rijden zonder enige grondversteving. We hebben al geconcludeerd dat dit intuïtief niet mogelijk is. Helaas kunnen wij dit niet met ons onderzoek onderbouwen want zoiets wordt alleen duidelijk wanneer er verschillende grondichtheden met elkaar vergeleken worden. Ons programma geeft echter bij verschillende dichtheden steeds dezelfde uitkomst.

Hieruit kunnen we concluderen dat er een fout in ons onderzoek zit. De onderzoeksvraag moet helaas onbeantwoord blijven.

A Matlab programma Statisch Probleem

```
% De numerieke manier van oplossen voor het statische probleem

% aantal elementen (moet veelvoud van 10 zijn)
N = 1000;
% stapgrootte
h = 1;
% veerconstante k
k = 1.186 * 10^6;
% elastischoppervlaktemoment = E * I
EI = 0.2*10^12 * 1.728*10^(-5);

% vector met enen en viertjes
enen = ones(1,N-3);
viertjes = -4*ones(1,N-2);

A = diag(enen,-2) + diag(viertjes,-1) + 6*eye(N-1) + diag(viertjes,1) + diag(enen,2);
A(1,2) = -8;
A(2,2) = 7;
A(1,3) = 2;
A(N-1,N-1) = -5;

A = sparse(EI/h^4 * A + k*eye(N-1));

% de belastingsvector q van de trein op de rails
q = [ -65000*9.81/50*ones(N/10,1)
      zeros(9/10*N-1,1) ];

% Nu hebben we de vergelijking, oplossen dan maar!
u = A\q;

% Plaatje tekenen
clf;
shg;
hold on;
xlabel('Lengte van de rails (m)');
ylabel('Doorzakking (m)');
title('Verloop van de doorzakking van de treinrails');
text(1,0,['Met ' num2str(N) ' stappen']);

% En bewonder maar
```

B Matlab programma Dynamisch Probleem

```
% De numerieke manier van oplossen voor het dynamische probleem
clear
format long

% wat lengten in meters
treinlengte = 100;
raillengte = 1000;
% snelheid = snelheid van de trein in m/s
snelheid = 5;

% maxtijd = aantal tijdstappen dat we de trein laten rijden in seconden
% zo gekozen dat het hele interval met de gegeven snelheid doorlopen wordt
maxtijd = (treinlengte+raillengte)/snelheid;
% N = de nauwkeurigheid
N = 300;
% stapgrootte
h = raillengte/N;
% tau = stapgrootte in de tijd
tau = (1/2) * (1/snelheid) * h ;

% veerconstante k
k = 1.186 * 10^6;
% elastischoppervlaktemoment = E * I
EI = 0.2*10^12 * 1.728*10^(-5);
% grond dichtheid
rho = 160;
% treinbelasting
belasting = -130000*9.81/100;

% vectoren met enen en viertjes
enen = ones(1,N-2);
viertjes = -4*ones(1,N-1);

A = sparse((diag(enen,-2) + diag(viertjes,-1) + 6*eye(N) + diag(viertjes,1) + diag(enen,2)));
A(1,1) = -5;
A(N,N) = -5;

A = sparse(1/rho * (EI/h^4 * A + k*eye(N)));

B = sparse([ zeros(N) eye(N)
            -A      zeros(N) ]);
```

```

C = sparse(eye(2*N) - tau*B);
D = C\eye(2*N);

clear('A');
clear('B');
clear('C');
clear('enen');
clear('viertjes ');

end;

disp('Ok, de matrices zijn nu opgesteld')

% plaatje
clf;
shg;
hold on;
xlabel('Lengte van de rails (m)');
ylabel('Doorzakking (m)');
title('Verloop van de doorzakking van de treinrails in het dynamische geval');
text(1,0.0015,['Met ' num2str(N) ' stappen, tijdstap is ' num2str(tau) '.']);
text(1,0.0005,['Snelheid is ' num2str(snelheid) ' m/s']);

% beginvoorwaarden
p(:,1) = zeros(2*N,1);
w(:,1) = zeros(2*N,1);

for i = 2:(maxtijd/tau)
    % berekenen waar de trein zich bevindt
    begin = snelheid * i * tau / h;

    begin = round(begin) - treinlengte/h;
    tussen = treinlengte/h;
    eind = N - (begin + treinlengte/h);

    if (begin < 0)
        tussen = tussen + begin;
        begin = 0;
    end;

    if (begin + tussen > N)
        if (begin > N)
            begin = N;

```

```

        tussen = 0;
        eind = 0;
    else
        tussen = N-begin;
        eind = 0;
    end;
end;

% hier dus
p(:,2) = sparse([zeros(N,1);zeros(begin,1);ones(tussen,1);zeros(eind,1)]);

% een tijdstap
w(:,2) = D*(w(:,1) + tau*p(:,2)*belasting/rho);

% waarden doorschuiven: grote optimalisatie in tegenstelling tot alle waarden 'bewaren'
,
p(:,1) = p(:,2);
w(:,1) = w(:,2);

if (i == 100)
    plot(1:(1000)/N:1000, w(1:N,1), 'r')
    pause(10)
end;
i
end;

```

C Maple Worksheet

D Literatuur

Referenties

- [1] *Binas*. Wolters-Noordhoff, 1992.
- [2] dr. ir. C. Korving en ir. H.F.M. Corstens. *Mechanica van Continue Media I*. dictatenverkoop, 1997.
- [3] dr. ir. C. Vuik. *Numerieke Methoden voor Differentiaalvergelijkingen I*. dictatenverkoop, 1999.
- [4] dr. ir. C. Vuik. *Numerieke Methoden voor Differentiaalvergelijkingen II*. dictatenverkoop, 2000.

