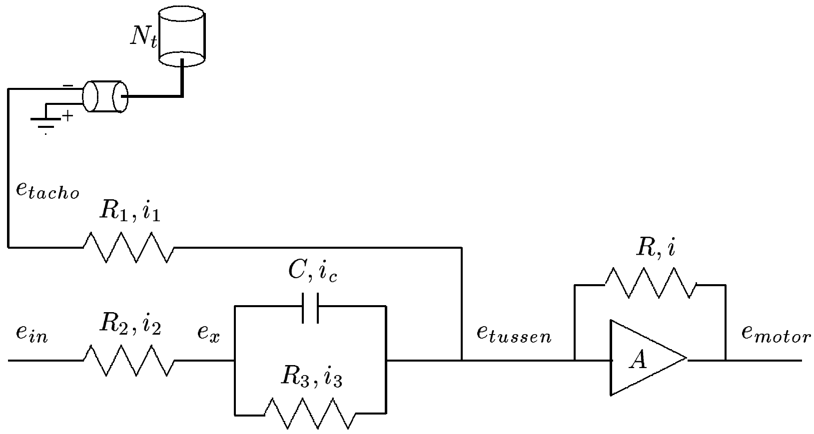
De Droogslingeraar

het regelsysteem



Verslag voor Modelbouw 3 Regelsystemen

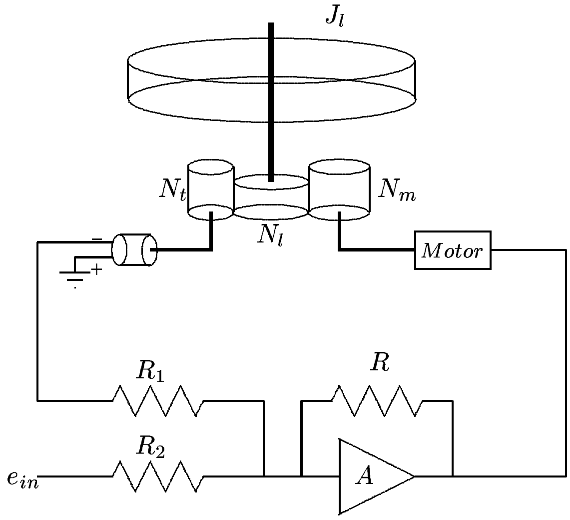
Sebastiaan
Willem van Hillegaersbergstraat 100c
3051 RP Rotterdam
sebastia@ch.twi.tudelft.nl
121164

Datum: 20 april 2001

Inhoudsopgave

1 Samenvatting

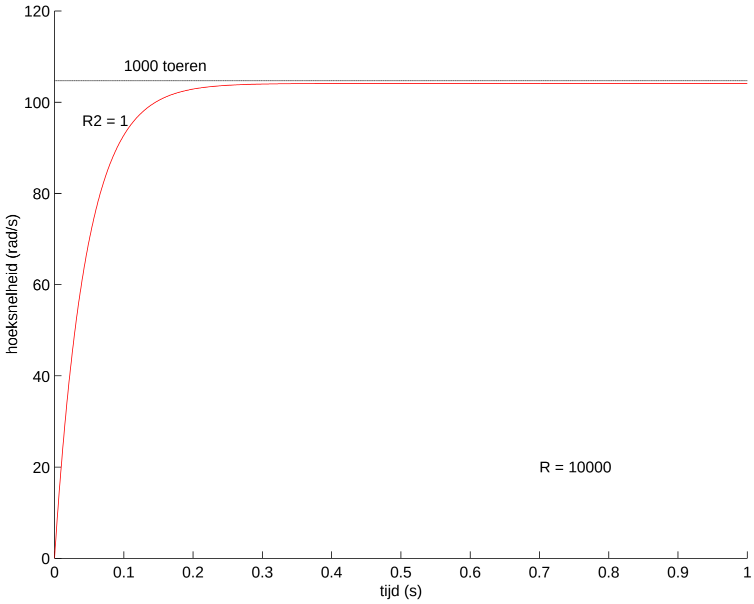
Dit is een onderzoek naar de werking van een eenvoudige schakeling met feedback voor een centrifuge, zoals gegeven in figuur 1. De eis is dat de centrifuge uiteindelijk op 1000 toeren draait wanneer de ingangsspanning op 1 Volt wordt gezet. De eindtoestand wordt bepaald door de verhouding tussen R_1 en R_2. Onze eerste taak is dan ook om deze verhouding te bepalen en het verschil van de eindtoestand te bekijken met de gewenste eindtoestand. Het verloop is gegeven in figuur 2.



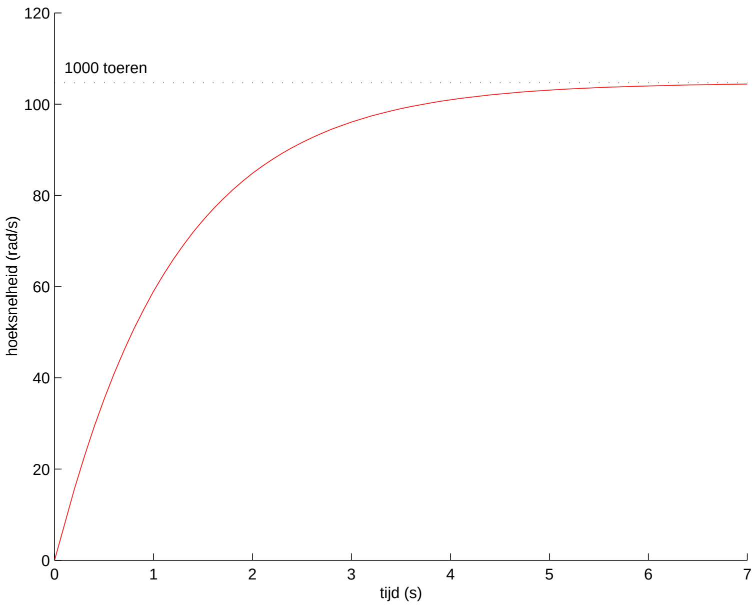
Figuur 1: Schema van een centrifuge

Zoals te zien is, is het begin nogal ruw. Wanneer de verhouding tussen R_2 en R kleiner wordt, vind het opstarten over een langer periode plaats, maar ook neemt de fout toe. In het achterhoofd gehouden dat de weerstand $R \to \infty$ wordt van het apparaat verwacht dat deze binnen oneindig korte tijd op volle toeren is. Dit is natuurlijk niet erg bevorderend voor de levensduur van het apparaat, dus is het verstandig om een condensator in de schakeling op te nemen. Hierdoor kunnen we de tijd van het opstarten verlengen en een extra eis stellen zoals "pas na 5 seconden op 95% van de volle snelheid". Het verloop ziet er dan ook wat vriendelijker uit, zoals te zien is in figuur 3. Merk wel op dat de tijdas een andere schaal heeft dan figuur 2. Ook is het verschil tussen de gewenste eindtoestand en de werkelijke eindtoestand nihil.

Men doet er dus verstandig aan de schakeling te bouwen volgens figuur 1 met het spanningsblok zoals gegeven in figuur 13 op pagina 12. Verder is dan $C = 0.001$ Farad, $R_1 = 120132$ Ohm, $R_2 = 1$ Ohm, $R_3 = 1200$ Ohm en $R = 100000$ Ohm.



Figuur 2: Opstarten zonder condensator



Figuur 3: Opstarten met condensator

2 Zonder Condensator

In dit hoofdstuk wordt uitgelegd hoe het Laplace schema wordt opgebouwt, ingevuld en later weer wordt teruggetransformeerd. De gebruikte variabelen en hun waarden zijn gegeven in de tabel, evenals enkele andere symbolen.

Variabele	Waarde	Eenheid
J_l	$1,5$	$lb \cdot inch \cdot sec^2$
T_0	40	$inch \cdot lb$
ω_0	4000	rpm
J_m	$0,002$	$ln \cdot inch \cdot sec^2$
N_l	80	tanden last
N_m	40	tanden motor
N_t	20	tanden tachometer
tachometerconstante	$\frac{30}{1000}$	$\frac{volts}{rpm}$
voltage motor	115	$Volt$
A	$\to \infty$	versterker
R	$\to \infty$	Ohm
C	te onderzoeken	$Farad$

Tabel 1: Gegeven waarden

2.1 Motorblok

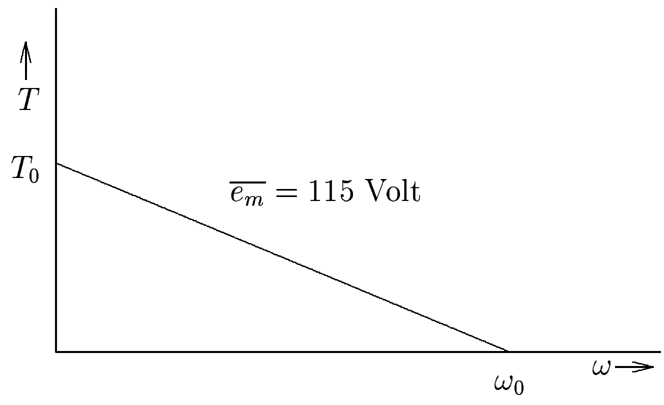
In dit blok zijn de volgende set vergelijkingen van belang:

$$\begin{cases} e_m = c_1\omega_m + c_2T_m \\ T_m = J_m\dot{\omega}_m + T_d \\ T_d = \frac{N_m}{N_l}T_l \\ T_l = J_l\dot{\omega}_l \\ \dot{\omega}_m = \frac{N_l}{N_m}\dot{\omega}_l \end{cases} \tag{1}$$

We beginnen met de eerste vergelijking. Dit is de motorkarakteristiek, welke wordt vastgelegd door de constanten c_1 en c_2. T_0 is de maximale last waarmee de motor niet meer op gang komt. ω_0 is de rotatiesnelheid van de motor in het ideale geval (geen last). Wanneer de ingangsspanning e_m op 115 volt wordt gezet, is het verband tussen de last en rotatiesnelheid vastgelegd door de karakteristiek geschetst in figuur 4.

Door het invullen van $(0, T_0)$ en $(\omega_0, 0)$ krijgen we als constanten:

$$\boxed{c_1 = \frac{69}{80\pi}, \quad c_2 = \frac{23}{8}} \tag{2}$$

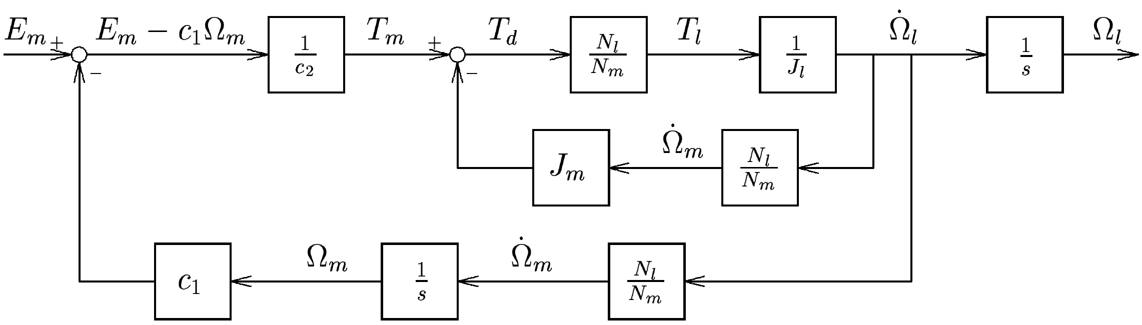


Figuur 4: Motorkarakteristiek

De drie opvolgende vergelijkingen hebben te maken met de draaimomenten van de schijven en traagheidsmomenten en de terugslag van de last op de motor. Zo krijgt de motor, buiten zijn eigen moment, ook te maken met de traagheid van de last, natuurlijk met de juiste verhouding. Vullen we deze vergelijkingen in elkaar in, dan zien we het volgende moment T_m van de motor verschijnen:

$$T_m = J_m \dot{\omega}_m + \frac{N_m}{N_l} J_l \dot{\omega}_l \tag{3}$$

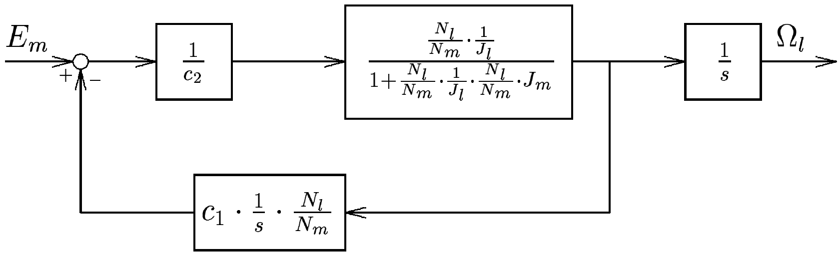
Al deze constanten zijn gegeven en bekend. De set vergelijkingen (1) kunnen op de volgende manier in een Laplace schema worden gezet:



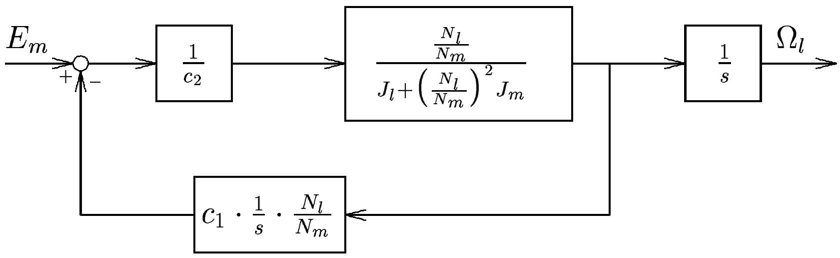
Figuur 5: Motorblok

Na het samenvoegen van het binnenste feedback systeem en daarna de buitenste, wordt het blokschema achtereenvolgens waarin

$$H_m = \frac{1}{\left(J_l + \left(\frac{N_l}{N_m}\right)^2 J_m\right) c_2 s + \frac{N_l}{N_m} c_1} \tag{4}$$



Figuur 6: Motorblok Stap 1



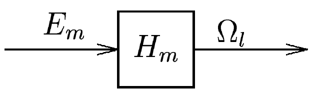
Figuur 7: Motorblok Stap 2

2.2 Spanningsblok

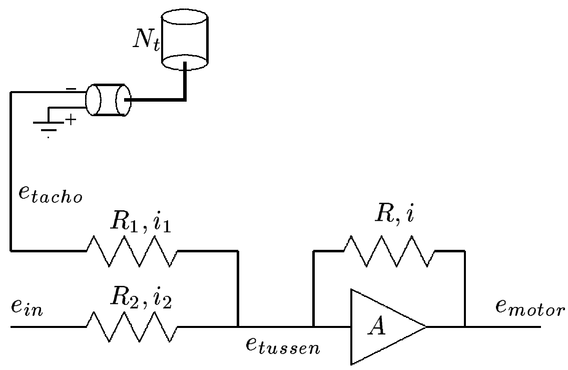
We gaan het spanningsblok, dat gegeven is in figuur 9, omzetten naar een Laplace blokschema. Toepassen van de wetten van Ohm en Kirkhof geeft het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} i_1 + i_2 & = i \\ e_{motor} & = Ae_{tussen} \\ e_{in} - e_{tussen} & = i_2 R_2 \\ e_{tussen} - e_{tacho} & = i_1 R_1 \\ e_{motor} - e_{tussen} & = iR \end{cases} \tag{5}$$

waarbij gebruik is gemaakt van het feit dat we willen dat $e_{motor} > e_{tussen}$, maar dat $e_{tussen} > e_{tacho}$, want e_{tacho} is negatief, vandaar dat $e_{in} > e_{tussen}$.



Figuur 8: Motorblok Stap 3



Figuur 9: Spanningsblok

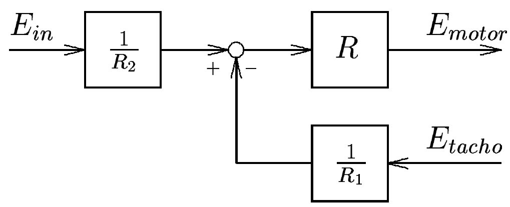
We weten dat A groot is, dus $e_{tussen} = 0$. Dan volgt al snel dat:

$$\begin{cases} i_2 &= \frac{e_{in}}{R_2} \\ i_1 &= -\frac{e_{tacho}}{R_1} \\ i &= \frac{e_{motor}}{R} \end{cases} \tag{6}$$

wat ons geeft voor e_{motor}:

$$e_{motor} = R\left(\frac{e_{in}}{R_2} - \frac{e_{tacho}}{R_1}\right) \tag{7}$$

Deze vergelijking geeft in het Laplacedomein figuur 10.



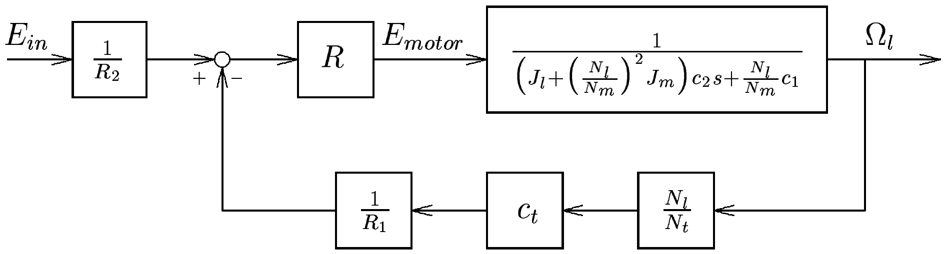
Figuur 10: Spanningsblok Laplacedomein

Verder hebben we nog de tachometer hierin te verwerken. De tachometerconstante is $\frac{30}{1000}\frac{volt}{rpm} = \frac{30 \cdot 60}{1000 \cdot 2\pi}\frac{Vs}{rad} = \frac{9}{10\pi}\frac{Vs}{rad}$. We weten ook dat de tachometer draait met een snelheid van $\frac{N_l}{N_t}$ ten opzichte van ω_l.

$$\boxed{c_t = \frac{9}{10\pi}, \quad \omega_t = \frac{N_l}{N_t}\omega_l} \tag{8}$$

2.3 Het hele Laplace systeem

Met bovenstaande wetenschap zijn we in staat om het hele probleem in één Laplace blokschema weer te geven en daaruit een formule af te leiden. We hebben eerst nog het terugkoppelingssysteem gegeven in figuur 11 waarna we deze naar één vergelijking schrijven en zullen versimpelen.



Figuur 11: Totale systeem

De invoer is nog steeds E_{in} en de uitvoer Ω_l, dus geeft dit blokschema in het Laplace domein de volgende vergelijking:

$$\Omega_l = \frac{1}{R_2}\frac{\frac{R}{\left(J_l+\left(\frac{N_l}{N_m}\right)^2 J_m\right)c_2 s+\frac{N_l}{N_m}c_1}}{1+\frac{R}{\left(J_l+\left(\frac{N_l}{N_m}\right)^2 J_m\right)c_2 s+\frac{N_l}{N_m}c_1}\cdot\frac{N_l}{N_t}\cdot\frac{1}{R_1}\cdot c_t}\cdot E_{in} \tag{9}$$

We werken alle breuken weg door teller en noemer met $\left(J_l+\left(\frac{N_l}{N_m}\right)^2 J_m\right)c_2 s+\frac{N_l}{N_m}c_1$ en R_1 te vermenigvuldigen. We komen dan tot het eerste orde systeem zoals gegeven is in vergelijking 10.

$$\Omega_l = \frac{RR_1}{\left(J_l+\left(\frac{N_l}{N_m}\right)^2 J_m\right)c_2 R_1 R_2 s+\frac{N_l}{N_m}c_1 R_1 R_2+\frac{N_l}{N_t}c_t R R_2}E_{in} \tag{10}$$

Dan is het nu tijd om alle (bekende) constanten in te vullen en de breuk om te schrijven in de vorm $\frac{A}{s+B}$.

$$\Omega_l = \frac{RR_1}{(1,5+4\cdot 0,002)\,\frac{23}{8}R_1R_2 s+2\frac{69}{80\pi}R_1R_2+4\frac{9}{10\pi}RR_2}E_{in} \tag{11}$$

$$\Omega_l = \frac{RR_1 40\pi}{173,42\pi R_1 R_2 s+69R_1R_2+144RR_2}E_{in} \tag{12}$$

$$\Omega_l = \frac{\frac{40\pi RR_1}{173,42\pi R_1R_2}}{s+\frac{69R_1R_2+144RR_2}{173,42\pi R_1 R_2}}E_{in} \tag{13}$$

2.4 Het echte domein

Nu gaan we weer terug naar het echte domein. De invoerspanning e_{in} wordt op 1 Volt gezet wanneer wij de machine aan zetten. Dit resulteert dat $E_{in} = \frac{1}{s}$ in vergelijking 13. Om gebruik te kunnen maken van bestaande Inverse Laplace tabellen, is het dus nodig om vergelijking 13 met $E_{in} = \frac{1}{s}$ door middel van breuksplitsing om te schrijven naar:

$$\frac{A}{s+B} + \frac{C}{s} \tag{14}$$

$$\frac{(A+C)\,s + BC}{(s+B)\,s} \tag{15}$$

Vergelijking 15 is hetzelfde als vergelijking 13 en we komen dus tot de volgende waarden voor A, B en C:

$$\begin{cases} A &= -C \\ B &= \frac{69R_1R_2+144RR_2}{173{,}42\pi R_1R_2} \\ &= \frac{69R_1+144R}{173{,}42\pi R_1} \\ C &= \frac{40\pi RR_1}{173{,}42\pi R_1R_2} \cdot \frac{173{,}42\pi R_1R_2}{69R_1R_2+144RR_2} \\ &= \frac{40\pi RR_1}{69R_1R_2+144RR_2} \end{cases} \tag{16}$$

Nu kunnen we terugtransformeren naar het echte domein:

$$\omega(t) = C + Ae^{-Bt} \tag{17}$$

$$= \frac{40\pi RR_1}{69R_1R_2+144RR_2} - \frac{40\pi RR_1}{69R_1R_2+144RR_2} e^{-\frac{69R_1+144R}{173{,}42\pi R_1}t} \tag{18}$$

We willen dat het toerental uiteindelijk op 1000 komt. Dit kunnen we bepalen door de verhouding tussen R_1 en R_2 te berekenen.

$$\lim_{t\to\infty} \omega(t) = \frac{40\pi RR_1}{69R_1R_2+144RR_2} = \frac{1000\cdot 2\pi}{60} \tag{19}$$

$$13800\frac{R_1R_2}{R} + 28800R_2 = 240R_1 \tag{20}$$

Ook is R groot, dus in theorie:

$$\lim_{R\to\infty}\left[13800\frac{R_1R_2}{R} + 28800R_2 = 240R_1\right] \tag{21}$$

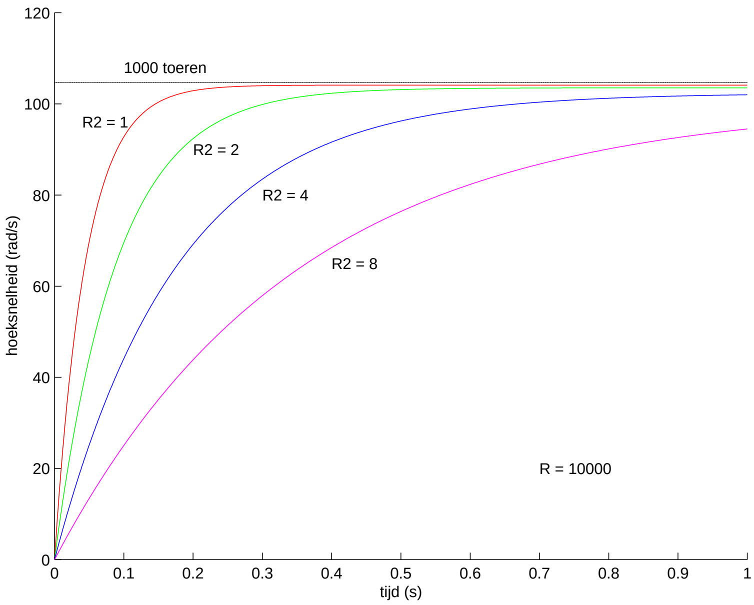
$$\boxed{R_1 = 120R_2} \tag{22}$$

Vullen we dit weer in de vergelijking in, dan houden we over:

$$\omega(t) = \frac{4800\pi R}{144R+8280R_2} - \frac{4800\pi R}{144R+8280R_2} e^{-\frac{8280R_2+144R}{20810{,}4\pi R_2}t} \tag{23}$$

met $R \gg R_2$.

Deze formule geeft de grafieken weergegeven in figuur 12 bij verschillende keuzen voor R_2. Hoe kleiner de verhouding tussen R en R_2, hoe minder snel het apparaat op toeren komt, maar ook minder dicht bij de 1000 toeren.



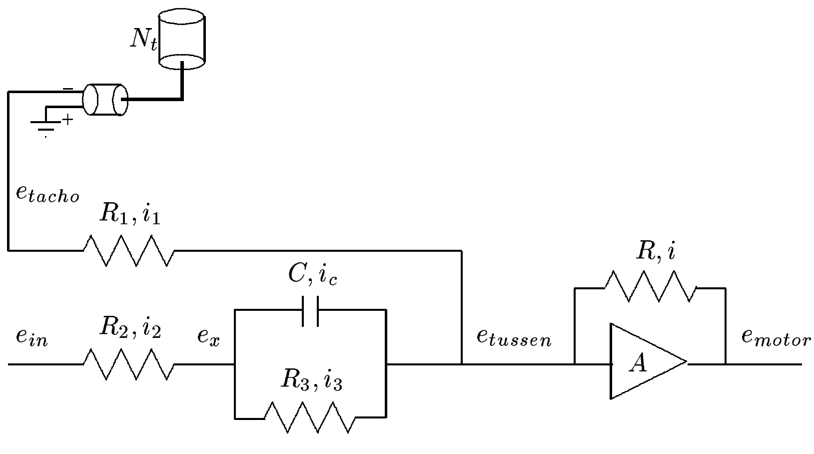
Figuur 12: Toerentalverloop

3 Met Condensator

We zagen dat het systeem zonder condensator (het oorspronkelijke systeem) binnen zeer korte tijd op volle toeren draait. Pogingen om deze tijd te verlengen mislukten omdat veranderingen in de verhouding tussen R en R_2 (en dus ook R_1) niet alleen het gewenste resultaat gaven (langere opstarttijd) maar ook als neveneffect dat de eindtoestand lager uitvalt dan gewenst. Ook is in theorie R oneindig groot, dus eigenlijk zou je niets aan de verhouding tussen R_2 en R kunnen (mogen?) veranderen. Echter, met $R \to \infty$ dan zou het systeem binnen notime op toeren zijn, hetgeen voorstelbaar is dat dit de levensduur van de apparatuur niet ten goede komt.

In dit tweede gedeelte willen we de opstartfase verlengen. Een eis zou bijvoorbeeld kunnen zijn "Pas na 5 seconden op 95% van de 1000 toeren". Dit kunnen we bereiken door een condensator aan de schakeling toe te voegen. De enige plaats waar de condensator goed zijn werk kan doen is op de draad waar de stroom wordt aangezet, e_{in}. Hier wordt dan de stroomsterkte in het begin opgevangen door de condensator, de spanning staat dan over de bijgevoegde weerstand R_3. Naarmate de condensator geladen raakt, wordt er meer stroom door de rest van het systeem gestuurd. Is de condensator eenmaal geladen, dan heeft deze geen invloed meer op de rest van de werking van het systeem. Deze is te zien in figuur 13.

Andere plaatsen waar de condensator geplaatst zou kunnen worden, zijn er eigenlijk niet. Plaatsing na het knooppunt van R_1 en R_2 doet in feite het terugkoppelingssysteem teniet: alle veranderingen worden dan door de condensator gebufferd. Ditzelfde probleem krijgen we wanneer we de condensator achter de versterker (in de lijn van e_{motor}) zouden plaatsen, met als extra dat je hier met hogere spanningen hebt te maken, wat behalve een duurdere condensator vereist, ook gevaarlijk kan zijn omdat de condensator geladen is met hoge spanningen.



Figuur 13: Spanningsblok met condensator

3.1 Oplossing van de vergelijkingen

De vergelijkingen van het spanningsblok zijn nu:

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 & = i_1 + i_c + i_3 \\ e_{motor} & = Ae_{tussen} \\ e_{in} - e_x & = i_2 R_2 \\ e_x - e_{tussen} & = i_3 R_3 \\ e_{tussen} - e_{tacho} & = i_1 R_1 \\ e_{motor} - e_{tussen} & = iR \\ i_c & = i_0 e^{-\frac{t}{R_3 C}} \end{cases} \tag{24}$$

Wederom is $e_{tussen} = 0$. Dan is $e_{in} = i_2 R_2 + i_3 R_3$. In het begin is de condensator ongeladen. Zodra de stroom op e_{in} wordt gezet, is de weerstand van de condensator praktisch gelijk aan nul. Dus in verhouding is de weerstand R_3 oneindig en dus de stroomsterkte $i_3 = 0$. Hieruit volgt dat $i_0 = i_{2_0} = \frac{e_{in}}{R_2}$. Hiermee zijn we in staat het stelsel vergelijkingen (24) te versimpelen tot:

$$\begin{cases} i & = i_1 + i_c + i_3 \\ i_1 & = -\frac{e_{tacho}}{R1} \\ i_c & = \frac{e_{in}}{R_2} e^{-\frac{t}{R_3 C}} \\ i_3 & = \frac{e_{in} - i_2 R_2}{R_3} \\ i_2 = i - i_1 & = \frac{e_{motor}}{R} + \frac{e_{tacho}}{R_1} \end{cases} \tag{25}$$

Alles invullen:

$$\frac{e_{motor}}{R} = \frac{e_{in}}{R_2} e^{-\frac{t}{R_3 C}} - \frac{e_{tacho}}{R_1} + \frac{e_{in}}{R_3} - \frac{R_2 e_{motor}}{R} - \frac{R_2 e_{tacho}}{R_1} \tag{26}$$

$$e_{motor} = \frac{R}{1 + R_2} \Big[\Big(\frac{1}{R_2} \cdot e^{-\frac{t}{R_3 C}} + \frac{1}{R_3} \Big) e_{in} - \Big(\frac{1 + R_3}{R_1} \Big) e_{tacho} \Big] \tag{27}$$

In het Laplace domein wordt dit:

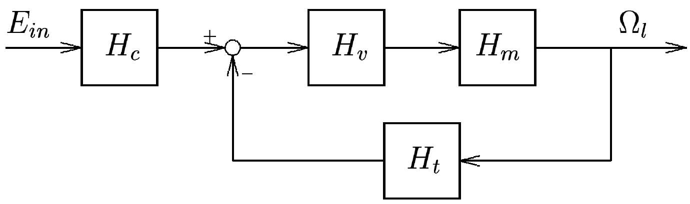
$$E_{motor} = \frac{R}{1 + R_2} \Big[\Big(\frac{1}{R_2} \frac{R_3 C}{1 + R_3 C s} + \frac{1}{R_3} \Big) E_{in} - \Big(\frac{1 + R_3}{R_1} \Big) E_{tacho} \Big] \tag{28}$$

Het hele systeem ziet er dan uit zoals gegeven in figuur 14 met:

$$H_c = \frac{1}{R_2} \frac{C R_3}{1 + R_3 C s} + \frac{1}{R_3} \tag{29}$$

$$H_t = \frac{1 + R_3}{R_1} 4 C_t \tag{30}$$

$$H_v = \frac{R}{1 + R_2} \tag{31}$$



Figuur 14: Totale systeem met condensator

$$H_m = \frac{1}{\left(J_l + \left(\frac{N_l}{N_m}\right)^2 J_m\right) c_2 s + \frac{N_l}{N_m} c_1} \tag{32}$$

$$\Omega_l = H_c \frac{H_v H_m}{1 + H_v H_m H_t} E_{in} \tag{33}$$

3.2 Uitwerking

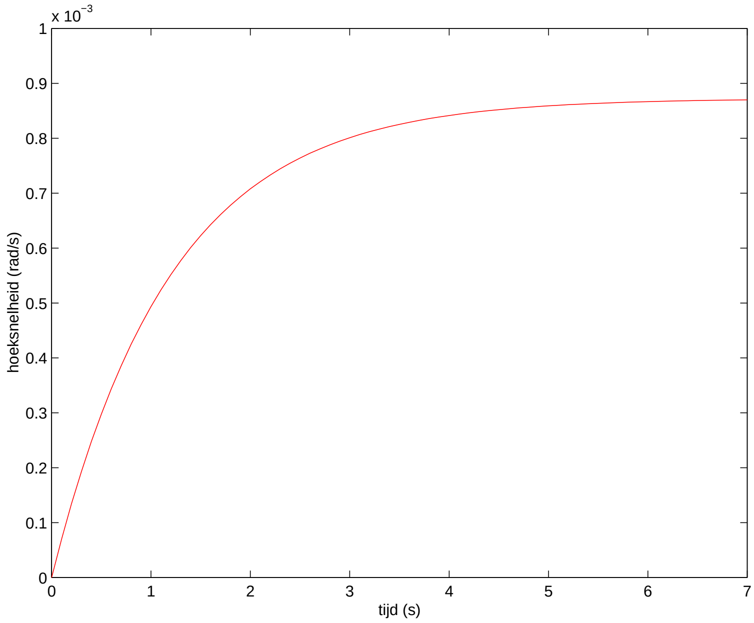
Wanneer we de gevonden vergelijkingen in het oude systeem integreren, ontstaat een nieuw systeem. Dit systeem zal de onbekenden R_1, R_2, R_3 en C bevatten. De verhoudingen tussen deze 4 onbekenden zullen we later precieser definiëren. In het komende stuk is gebruik gemaakt van Maple omdat de vergelijkingen te groot werden en teveel onbekenden bevatten om goed met de hand te kunnen oplossen. De volledige Maple Worksheet is in de appendix te vinden.

We laten Maple vergelijking 33 terugtransformeren naar het echte domein. De vergelijking die hieruit komt is erg groot en onoverzichtelijk. We vullen de bekende constanten in ($R = 100000$) en komen zo tot een 'primitieve' functie $\omega(t)$ die nog bepaald (gevormd) kan worden door waarden te kiezen voor de weerstanden en de condensator.

Het oorspronkelijke probleem leerde ons al dat de verhouding tussen R_1 en R_2 bepalend is voor de eindtoestand. Dat is in dit geval ook zo. Echter, we hebben nu de luxe om met R_3 en C de opstarttijd te veranderen. R_3 en C zijn niet van invloed op de eindtoestand, dat wil zeggen, je kunt deze naar gelieve veranderen zonder de eindtoestand te beïnvloeden. Zo hebben we de plaatsing van de condensator ook gekozen.

Gezien het vrij lastig is om met de primitieve vergelijking $\omega(t)$ te werken en de condensatorschakeling niet van invloed is op de eindstoestand, is de oplossing eenvoudig te vinden met 'zoeken'. We nemen nu $R_1 = R_2 = 1$ en variëren de waarden van R_3 en C totdat we een bevredigend verloop gevonden hebben. In het geval van $C = 0.001$ en $R_3 = 1200$ zien we dat de opstarttijd uitgebreid wordt tot ongeveer 5 seconden.

Ok, nu de vorm goed is, gaan we een echte waarde voor R_1 en R_2 kiezen. We gaan nu weer terug naar de primitieve vorm en stellen $C = 0.001$ en $R_3 = 1200$. Nemen



Figuur 15: Verloop met $C = 0.001$ en $R_3 = 1200$

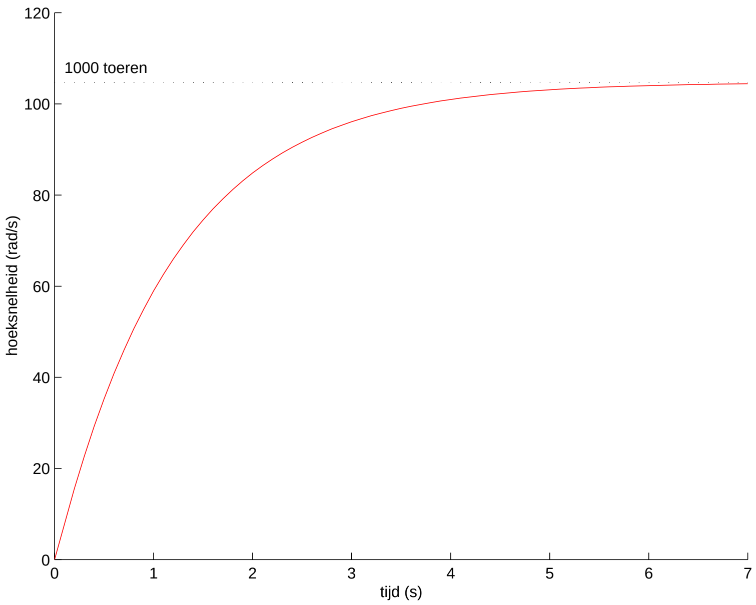
we de limiet voor $t \to \infty$ en stellen we deze gelijk aan $\frac{2000\pi}{60} \frac{rad}{s}$ dan is de verhouding tussen R_1 en R_2 bepaald:

$$R_1 = \frac{362213066}{3015,929 + 0,6492648 R_2 - 1,445133 R_2^2} \tag{34}$$

Nemen we $R_2 = 1$ dan is $R_1 = 120132$. Nu hebben we alle onbekenden gevonden. Dit geeft het gewenste resultaat.

De gemaakte fout is slechts $0,1 \cdot 10^{-6}$. De uiteindelijke functie is nu:

$$\omega(t) = 104,7 + 0,5909 e^{-132,25t} - 105,3 e^{-0,833t} \tag{35}$$



Figuur 16: Verloop met condensator

4 Literatuur

Referenties

[1] G.J. Olsder en J.W. van der Woude. *Mathematical Systems Theory*. Delft University Press, 1998.

[2] William E. Boyce en Richard C. Diprima. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, page 300. John Wiley & Sons, Inc, 1997.

[3] R. Roest. *Inleiding Mechanica*, chapter 5, 7, 8, 9. Delftse Universitaire Pers, 1996.

[4] Paul A. Tipler. *Physics for Scientists and Engineers*, pages 762–765. Worth Publishers, 1991.

5 Appendix: Maple Worksheet