

Appeltjes

opslaan en af laten koelen



het afkoelen van fruit door convectie

Sebastiaan
Willem van Hillegaersbergstraat 100c
3051 RP Rotterdam
sebastia@ch.twi.tudelft.nl
121164

Stromingsleer en Warmteoverdracht (wi3090)
october 2002

Inhoudsopgave

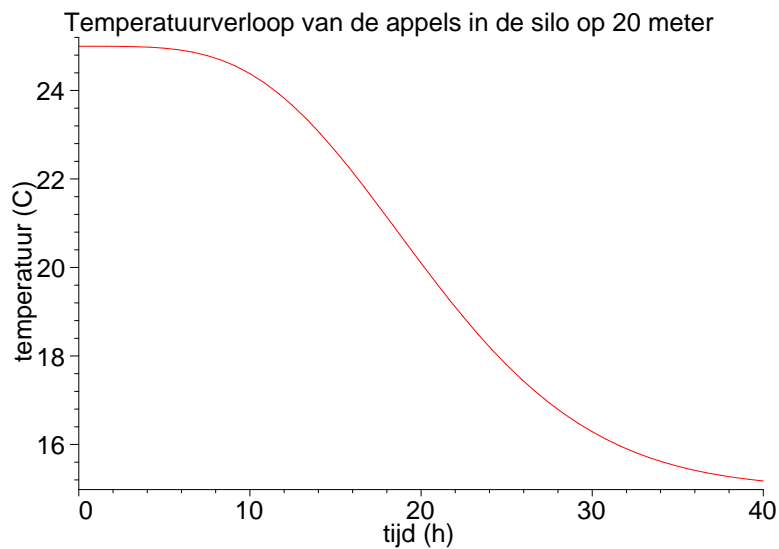
Samenvatting	3
Inleiding	4
Lijst der symbolen	5
1 Opstellen vergelijkingen	6
2 Transformatie naar het Laplace domein	8
3 Terugtransformatie	9
4 Praktische benadering	11
5 Resultaten	12
6 Conclusie	15
Referenties	16

Samenvatting

In dit verslag wordt onderzocht hoe lang een silo met appels gekoeld moet worden voordat de appels voldoende in temperatuur zijn gezakt. Hiertoe worden eerst de balansen opgesteld voor de temperatuur van de appels en van de lucht, waaruit een gekoppeld stelsel differentiaalvergelijkingen volgt die opgelost wordt met behulp van Laplace transformaties.

Daarna moeten er een aantal constanten bepaald worden. Dit gebeurt aan de hand van een mogelijke praktijksituatie waarin we een cilindervormige silo nemen van 6 meter doorsnede en 20 meter hoog, vol met appels.

Het blijkt dat het zo'n 31 uur duurt voordat de appels $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ in temperatuur gezakt zijn.



Figuur 1: Temperatuurverloop in de tijd van de appels op 20 meter

Inleiding

Het is zomer, het zonnetje schijnt en op het land zijn de boeren hard bezig met het oogsten van rijp fruit. Het fruit wordt opgeslagen in een grote schuur, wachtend op het vervoer naar de veiling.

Maar zo heet als het zomerweer is, zo snel vergaat het vers geoogste fruit. Het is dus wenselijk het fruit tijdens de opslag te koelen. Dit kan bereikt worden door koele lucht door de schuur te blazen. De vraag is nu: hoe lang duurt het voordat het fruit voldoende gekoeld is?

Er kan gedacht worden aan allerlei soorten fruit, maar in dit onderzoek hebben we het over appels. Dit omdat ik sinds mijn peutertijd nog braaf elke dag op school m'n appeltjes eet.

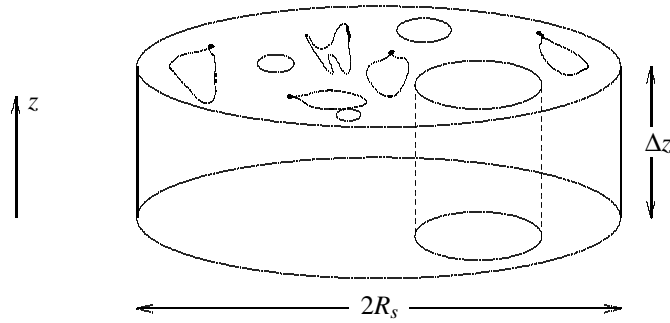
Lijst der symbolen

Variabele	Waarde	Eenheid	Beschrijving
$T_a(z, t)$		$^{\circ}C$	Temperatuurverloop van de appels
$T_l(z, t)$		$^{\circ}C$	Temperatuurverloop van de lucht
$\Theta_a(z; s)$		Ks	Laplace getransformeerde van T_a
$\Theta_l(z; s)$		Ks	Laplace getransformeerde van T_l
Constanten	Waarde	Eenheid	Beschrijving
K_a	$1,8098 \cdot 10^{-4}$	$\frac{1}{s}$	Appelconstante
K_l	0,63254	$\frac{1}{s}$	Luchtconstante
c_a	4180	$\frac{J}{kgK}$	Soortelijke warmte van appels
c_l	1000	$\frac{J}{kgK}$	Soortelijke warmte van lucht
ρ_a	998	$\frac{kg}{m^3}$	Dichtheid appel
ρ_l	1,293	$\frac{kg}{m^3}$	Dichtheid lucht
α_{la}	10	$\frac{J}{m^2Ks}$	Warmteoverdrachtscoëfficiënt tussen lucht en appels
l_a	1110	m	Omtrek van alle luchtkanaaltjes
β	0,52	1	Gedeelte van de inhoud van de silo dat 'appel' is
R_s	3	m	Straal van de silo
h	20	m	Hoogte van de silo
v	1	$\frac{m}{s}$	Snelheid van de koude lucht
T_0	25	$^{\circ}C$	Begintemperatuur van de appels
T_v	15	$^{\circ}C$	Temperatuur van de ingeblazen lucht
T_w	-10	$^{\circ}C$	Temperatuurverschil $T_v - T_0$

Tabel 1: Gegeven waarden

1 Opstellen vergelijkingen

Ter vereenvoudiging van het probleem beschouwen we een cilindervormige silo. In deze silo bevinden zich modelmatig gezien kanaaltjes waar de lucht doorheen geblazen wordt. Dit is weergegeven in figuur 2. De som van de omtrek van alle kanaaltjes noemen we l_a .



Figuur 2: Schijfje uit de silo

Als eerste moeten de balansen worden opgesteld. In dit probleem hebben we twee temperatuurverlopen, namelijk die van de appels en die van de lucht.

De warmtebalans voor de appels heeft de volgende vorm:

$$\beta\pi R_s^2 \rho_a c_a \Delta z (T_a(z, t) - T_a(z, t + \Delta t)) = \alpha_{la} l_a \Delta z \Delta t (T_a(z, t) - T_l(z, t)) \quad (1)$$

Hierin is $\beta\pi R_s^2 \Delta z$ het volume dat 'appel' is, dus de linkerkant geeft de benodigde energie weer om de appels $T_a(z, t) - T_a(z, t + \Delta t)$ te verhogen. Verder is $\alpha_{la} l_a \Delta z \Delta t$ de hoeveelheid warmteoverdracht tussen de appels en lucht over het oppervlak $l_a \Delta z$ gedurende Δt . We gaan ervan uit dat de temperatuur van de appels hoger is dan de ingeblazen luchttemperatuur, dus de appeltemperatuur zakt in tijd. Dit heeft tot gevolg dat $T_a(z, t) - T_a(z, t + \Delta t)$ en $T_a(z, t) - T_l(z, t)$ positief zijn.

De balans vereenvoudigen leidt tot een overzichtelijke differentiaalvergelijking, waaraan te zien is dat de temperatuur van de appels inderdaad strikt dalend is.

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} = -\frac{\alpha_{la} l_a}{\beta\pi R_s^2 \rho_a c_a} (T_a - T_l) \quad (2)$$

De warmtebalans voor de lucht is in grote lijnen hetzelfde, zij het niet dat er een convectie term extra is. De koele lucht wordt met snelheid v door de silo heen geblazen.

$$(1 - \beta)\pi R_s^2 \rho_l c_l \Delta z (T_l(z, t + \Delta t) - T_l(z, t)) = \alpha_{la} l_a \Delta z \Delta t (T_a(z, t) - T_l(z, t)) - (T_l(z + \Delta z, t) - T_l(z, t)) (1 - \beta)\pi R_s^2 v \Delta t c_l \rho_l \quad (3)$$

In de convectieterm is $1 - \beta$ het gedeelte wat 'lucht' is, dus $(1 - \beta)\pi R_s^2 v$ is de hoeveelheid lucht die zich door de kanaaltjes per tijdseenheid verplaatst. De soortelijke warmte c_l

staat voor de energie die nodig is om 1 m^3 lucht 1 K te verhogen. De hoeveelheid lucht vermenigvuldigen met de soortelijke dichtheid en het temperatuurverschil waarover het werkt geeft de convectie term.

Het vereenvoudigen van deze balans leidt tot de volgende representatie.

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = \frac{\alpha_{la} l_a}{(1 - \beta) \pi R_s^2 \rho_l c_l} (T_a - T_l) - v \frac{\partial T_l}{\partial z} \quad (4)$$

We gaan ervan uit dat de ingeblazen lucht een van een constante temperatuur T_v is en dat de appels en lucht (de lucht in de silo) van temperatuur T_0 zijn op tijdstip 0.

Als we vergelijkingen 2 en 4 combineren dan leidt dat tot het gekoppelde stelsel differentiaalvergelijkingen 5 met rand- en beginvoorwaarden 6.

$$\begin{cases} \frac{\partial T_a}{\partial t} &= -K_a (T_a - T_l) \\ \frac{\partial T_l}{\partial t} &= K_l (T_a - T_l) - v \frac{\partial T_l}{\partial z} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} T_a(z, 0) &= T_0 \\ T_l(z, 0) &= T_0 \\ T_l(0, t) &= T_v \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{\alpha_{la} l_a}{\beta \pi R_s^2 \rho_a c_a} \\ K_l &= \frac{\alpha_{la} l_a}{(1 - \beta) \pi R_s^2 \rho_l c_l} \end{aligned} \quad (7)$$

Hier zijn K_a en K_l positieve constanten.

2 Transformatie naar het Laplace domein

Direct oplossen van differentiaalvergelijking 5 met begin- en randvoorwaarden 6 is behoorlijk lastig. Onze oplosstrategie valt op de Laplace transformatie. Daartoe voeren we eerst \tilde{T}_a en \tilde{T}_l in.

$$\begin{aligned}\tilde{T}_a(z, t) &= T_a(z, t) - T_0 \\ \tilde{T}_l(z, t) &= T_l(z, t) - T_0\end{aligned}\quad (8)$$

Het voordeel hiervan is dat de begin- en randvoorwaarden 6 veranderen in

$$\begin{aligned}\tilde{T}_a(z, 0) &= 0 \\ \tilde{T}_l(z, 0) &= 0 \\ \tilde{T}_l(0, t) &= T_v - T_0 = T_w\end{aligned}\quad (9)$$

Dit stelsel differentiaalvergelijkingen neemt in het Laplace domein de volgende vorm aan:

$$\begin{cases} s\Theta_a &= -K_a(\Theta_a - \Theta_l) \\ s\Theta_l &= K_l(\Theta_a - \Theta_l) - v\frac{\partial\Theta_l}{\partial z} \end{cases}\quad (10)$$

$$\Theta_l(0; s) = \frac{T_w}{s}$$

We kunnen het stelsel 10 oplossen door de twee vergelijking in elkaar in te vullen en op te lossen naar z . Samenvoegen leidt tot

$$\frac{\partial\Theta_l}{\partial z} + \frac{1}{v}\left(s - \frac{K_l K_a}{s + K_a} + K_l\right)\Theta_l = 0\quad (11)$$

met als gevolg dat

$$\begin{aligned}\Theta_a &= T_w K_a \frac{1}{s(s + K_a)} e^{-\frac{z}{v}\left(s - \frac{K_l K_a}{s + K_a} + K_l\right)} \\ \Theta_l &= T_w \frac{1}{s} e^{-\frac{z}{v}\left(s - \frac{K_l K_a}{s + K_a} + K_l\right)}\end{aligned}\quad (12)$$

Nu is het stelsel ontkoppeld en kan teruggetransformeerd worden.

3 Terugtransformatie

Voordat teruggetranformeerd kan worden naar het gewonde tijdsdomein is het handig om vergelijking 12 in een schikkelijkere vorm te brengen. De exponent $e^{-\frac{z}{v}\left(s-\frac{K_l K_a}{s+K_a}+K_l\right)}$ is uit elkaar te trekken naar $e^{-\frac{z}{v}s} e^{\frac{z}{v}\left(\frac{K_l K_a}{s+K_a}\right)} e^{-\frac{z}{v}K_l}$. Om het nog wat overzichtelijker te maken voeren we een aantal constanten in. Uiteindelijk krijgt 12 een vorm die hanteerbaar is bij het toepassen van inverse Laplace transformaties.

$$\begin{aligned} c_1 &= T_w e^{-\frac{z}{v}K_l} \\ c_2 &= \frac{z}{v} \\ c_3 &= \frac{z}{v}K_l K_a \\ c_4 &= K_a \end{aligned} \tag{13}$$

$$\Theta_a = c_1 c_4 \frac{1}{s} e^{-c_2 s} \frac{1}{s+c_4} e^{\frac{c_3}{s+c_4}} \tag{14}$$

$$\Theta_l = c_1 \frac{1}{s} e^{-c_2 s} e^{\frac{c_3}{s+c_4}} \tag{15}$$

We beginnen met 14. Deze is te schrijven als $\Theta_a = c_1 c_4 F(s) \bar{G}(s)$ waarin $F(s) = \frac{1}{s} e^{-c_2 s}$ en $G(s) = \frac{1}{s} e^{\frac{c_3}{s}}$. Verder is $\bar{G}(s) = G(s+c_4)$. Met behulp van de inverse Laplace tabellen uit [2] kunnen we 14 terugtransformeren naar

$$c_1 c_4 \int_{\tau=0}^t f(t-\tau) \bar{g}(\tau) d\tau \tag{16}$$

$$c_1 c_4 \int_{\tau=0}^t u(t-\tau-c_2) e^{-c_4 \tau} I_0(2\sqrt{c_3 \tau}) d\tau \tag{17}$$

met I_0 de gemodificeerde Bessel functie van orde 0 en $u(t)$ de Heaviside functie.

De vergelijking voor de lucht gaat met een klein omweggetje. Schrijf in vergelijking 15 $\frac{1}{s}$ als $\frac{1}{s+c_4} + \frac{c_4}{s(s+c_4)}$. De vergelijking gaat dan over in

$$\Theta_l = c_1 e^{-c_2} \frac{1}{s+c_4} e^{\frac{c_3}{s+c_4}} + c_1 c_4 \frac{1}{s} e^{-c_2 s} \frac{1}{s+c_4} e^{\frac{c_3}{s+c_4}} \tag{18}$$

Maar dan is het tweede deel gelijk aan Θ_a ! Dankzij de lineariteit van de Laplace transformatie hoeven we hier geen extra aandacht aan te besteden. Het eerste deel schrijven we als $c_1 e^{-c_2 s} \bar{G}(s)$ en we kunnen terugtransformeren.

$$c_1 u(t-c_2) e^{-c_4 t} I_0(2\sqrt{c_3(t-c_2)}) + T_a(z, t) \tag{19}$$

Nu de constanten invullen in 17 en 19 en we hebben de expliciete uitdrukking voor $T_a(z, t)$ en $T_l(z, t)$. Herinner dat we op pagina 8 T_a en T_l hernoemd hebben naar \tilde{T}_a en \tilde{T}_l en

daarmee zijn gaan transformeren. Hier komt de constante T_0 weer in beeld, zodat $T_a(z, 0) = T_l(z, 0) = T_0$, zoals we in 6 op pagina 7 gekozen hadden.

$$T_a(z, t) = T_w K_a e^{-\frac{z}{v} K_l} \int_{\tau=0}^t u\left(t - \tau - \frac{z}{v}\right) e^{-K_a \tau} I_0\left(2\sqrt{\frac{z}{v} K_l K_a \tau}\right) d\tau + T_0 \quad (20)$$

$$T_l(z, t) = T_w e^{-\frac{z}{v} K_l} u\left(t - \frac{z}{v}\right) e^{-K_a t} I_0\left(2\sqrt{\frac{z}{v} K_a K_l \left(t - \frac{z}{v}\right)}\right) + T_a(z, t) \quad (21)$$

4 Praktische benadering

Nu we de expliciete uitdrukking hebben verkregen voor T_a en T_l kunnen we kijken wat in de praktijk het temperatuurverloop ongeveer zal zijn. Hiertoe moeten we echter wel nog wat constanten bepalen.

We gebruiken een modelmatige opzet voor onze appels. Alle appels worden netjes naast elkaar gezet zodat als het ware een rooster ontstaat. Dat wil zeggen dat als we aannemen dat een gemiddelde appel een diameter heeft van 8 cm , het opslagvolume van die ene appel 8^3 cm^3 bedraagt, terwijl het eigenlijke volume van de appel $\frac{4}{3}\pi 4^3 \text{ cm}^3$ is. Deze twee getallen op elkaar delen en we verkrijgen β , het gedeelte van de inhoud dat appel is.

$$\beta = 0,52$$

We bekijken zoals eerder gezegd een cilindervormige silo en we kiezen de straal $R_s = 3 \text{ m}$ en hoogte $h = 20 \text{ m}$. De hoogte van de silo is voor het wiskundige probleem niet van belang, maar voor de praktische benadering is het toch handig een fysieke hoogte te hebben. Het volume van de silo is dan 565 m^3 met als gevolg dat deze ruimte biedt aan $1\,104\,466$ appels. De totale oppervlakte van de appels is dan $1\,104\,466 \cdot 4\pi 4^2 = 22\,207 \text{ m}^2$. l_a volgt door dit getal te delen door de hoogte van de silo.

$$l_a = 1110 \text{ m}$$

De soortelijke warmteoverdrachtscoëfficiënt tussen lucht en de appels kiezen we vrij klein, aangezien de schil van de appels isolerend werkt.

$$\alpha_{la} = 10 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{Ks}}$$

Omdat appels voornamelijk uit water bestaan is gekozen om de dichtheid en soortelijke warmte van water te nemen voor de appels. Deze en de waarden voor de lucht zijn uit Binas [1] en gegeven in tabel 1 op pagina 5. Nu kunnen we alle waarden invullen in 7 op pagina 7.

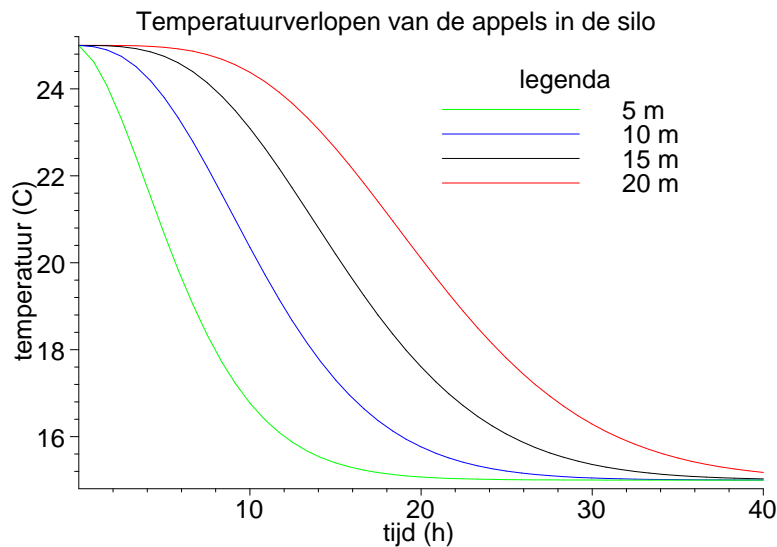
$$K_a = 1,8098 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\text{s}}$$

$$K_l = 0,63254 \frac{1}{\text{s}}$$

Als laatste kiezen we de begintemperatuur T_0 van de lucht en de appels in de silo gelijk aan $25 \text{ }^\circ\text{C}$ en de temperatuur van de ingeblazen lucht T_v gelijk aan $15 \text{ }^\circ\text{C}$. De snelheid v waarmee de lucht door de silo geblazen wordt is $1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

5 Resultaten

Met de constanten die we in hoofdstuk 4 verkregen hebben kunnen het temperatuurverloop van de appels en de lucht in beeld brengen. De vraag was hoe lang het duurt voordat de temperatuur van de appels voldoende gedaald is. Aangezien het een asymptotisch probleem is kunnen de appels nooit $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ worden. Een goede benadering is de vraag wanneer de appels 90% van de geplande temperatuursdaling gedaald zijn, dus in ons geval: na hoe lang zijn alle appels kouder $16\text{ }^{\circ}\text{C}$? Dit blijkt het geval te zijn na 31 uur constante koeling. Dan zijn de appels, inclusief die achterin de silo liggen ongeveer $16\text{ }^{\circ}\text{C}$. Zie figuur 3.

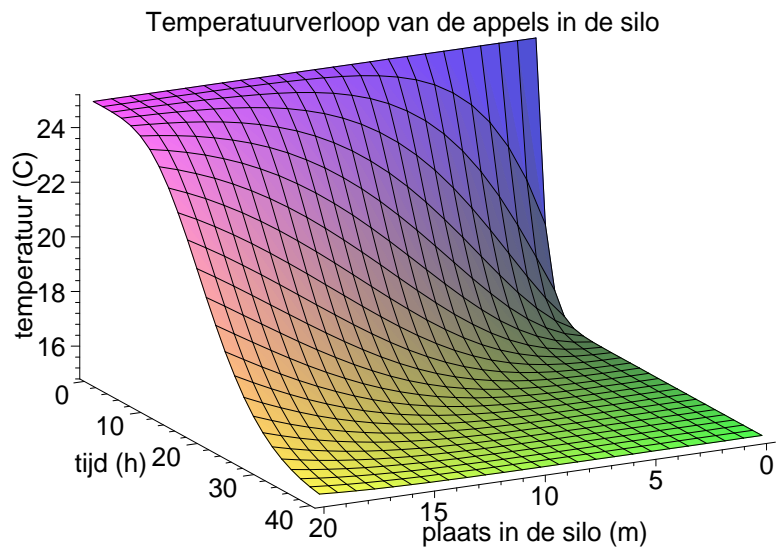


Figuur 3: Temperatuurverloop in de tijd van de appels

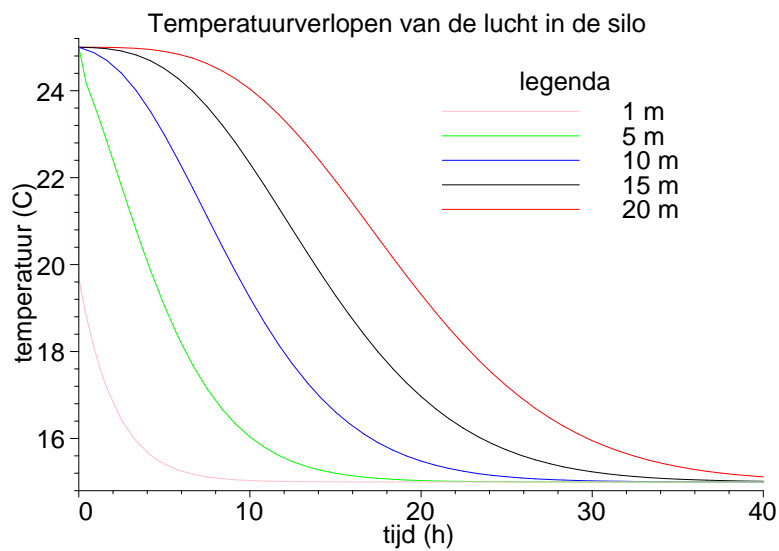
Als volledig overzicht is er in figuur 4 nog een verloop gegeven in ruimte en tijd.

Het temperatuurverloop van de lucht, gegeven in figuur 5 lijkt veel op die van de appels. Uit nadere inspectie blijkt echter dat de koele lucht binnen een korte afstand opwarmt, zoals te zien is in figuur 6 waar slechts naar de eerste 2 meters gekeken wordt.

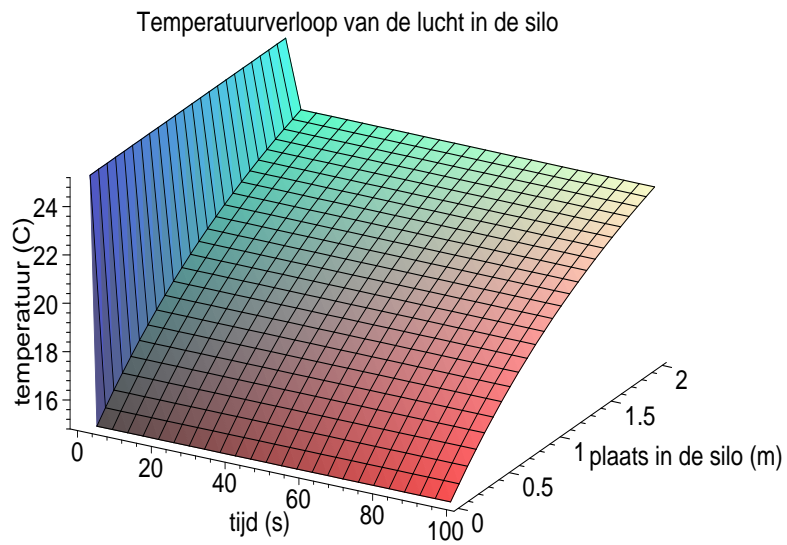
Interessant is ook om te kijken wat er rond het front gebeurt. Wel, voor het front is de temperatuur van de appels en lucht $T_0 = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Het temperatuurverloop van de appels vlak achter het front is ook niet interessant: het duurt immers meer dan 30 uur voordat deze goed gekoeld zijn, dus in een paar seconden gebeurt significant gezien niets. Het verloop van de luchttemperatuur laat echter een interessant verloop zien, zoals te zien is in figuur 7, waar $t = \frac{z}{v}$ gekozen is. Na 1 meter is de lucht dusdanig hard opgewarmt dat het de meters erna de appels weinig koelt.



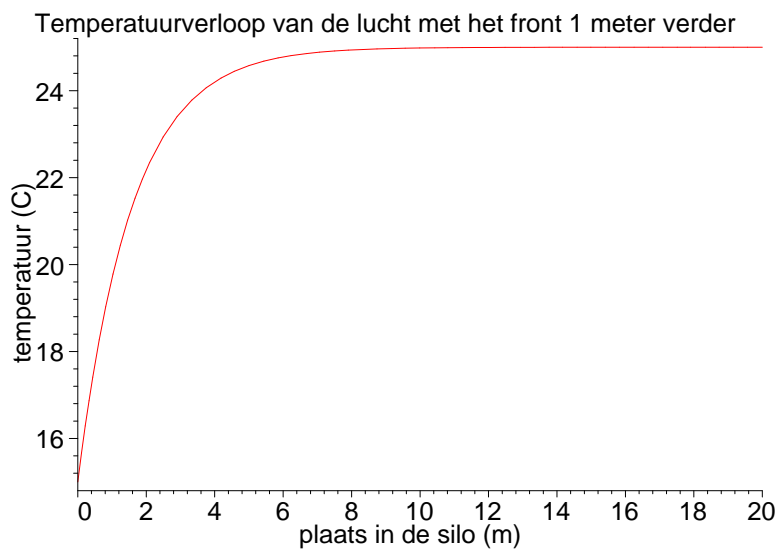
Figuur 4: Temperatuurverloop van de appels



Figuur 5: Temperatuurverloop in de tijd van de lucht



Figuur 6: Temperatuurverloop van de lucht



Figuur 7: Temperatuurverloop van de lucht met het front 1 meter verder

6 Conclusie

De onderzoeksvraag was hoe lang het duurt voordat een schuur fruit afgekoeld is van T_0 naar T_v . Wanneer de schuur een silo is en als fruit appels gekozen wordt duurt het ongeveer 31 uur voordat alle appels in de silo 10 °C in temperatuur gedaald zijn.

Referenties

- [1] G. Verkerk e.a. *Binas*. Wolters-Noordhoff, 1992.
- [2] A.P. Prudnikov Yu.A. Brychkov en O.I. Marichev. *Integrals and Series volume 5: Inverse Laplace Transforms*. Gordon and Breach Science Publishers, 1992.
- [3] William E. Boyce en Richard C. DiPrima. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, Inc., 1997.